



2015 年 理 系 第 3 問

1 枚 目 / 2 枚

数 理
石 井 K

3 $\triangle ABC$ において、 $\angle B$ と $\angle C$ は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き、辺 BC との交点を X_1 とし、線分 AX_1 の長さを 1 とする。また、 $BX_1 = 1$ 、 $CX_1 = 8$ とする。各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して以下の操作を行う。

辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き、辺 AB との交点を Y_n とする。また、点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き、辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き、辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

線分 $Z_n X_{n+1}$ の長さを l_n とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) l_1 を求めよ。
- (2) l_{n+1} を l_n を用いて表せ。
- (3) $l_n > \frac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば、 $3.169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてもよい。

$$\begin{aligned} (1) \quad BX_1 : BC &= BY_1 : BA \\ &= CZ_1 : CA \\ &= l_1 : 1 \end{aligned}$$

$$\therefore l_1 : 1 = 1 : 9 \quad \therefore l_1 = \frac{1}{9} //$$

$$(2) \quad l_n : 1 = CX_{n+1} : CX_1$$

$$\therefore CX_{n+1} = 8l_n$$

\therefore (1) と同様にして、

$$\begin{aligned} BX_{n+1} : BC &= BY_{n+1} : BA \\ &= CZ_{n+1} : CA \\ &= l_{n+1} : 1 \end{aligned}$$

ここで、 $BX_{n+1} = 9 - CX_{n+1} = 9 - 8l_n$ より、

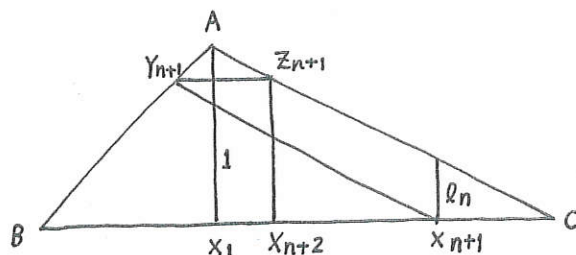
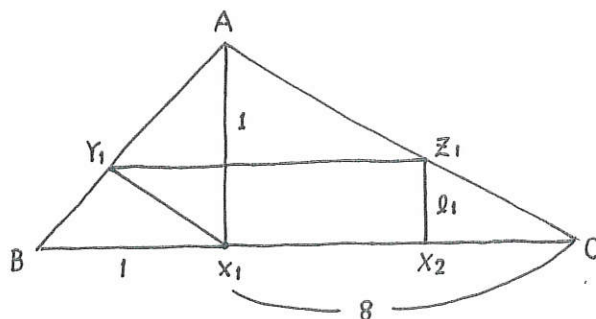
$$l_{n+1} : 1 = 9 - 8l_n : 9$$

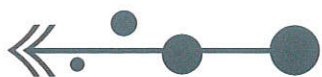
$$\therefore l_{n+1} = 1 - \frac{8}{9}l_n //$$

$$(3) \quad l_{n+1} - \frac{9}{17} = -\frac{8}{9} \left(l_n - \frac{9}{17} \right)$$

\therefore 数列 $\{l_n - \frac{9}{17}\}$ は初項 $l_1 - \frac{9}{17} = -\frac{64}{153}$ 、公比 $-\frac{8}{9}$ の等比数列

$$\therefore l_n - \frac{9}{17} = -\frac{64}{153} \cdot \left(-\frac{8}{9}\right)^{n-1} \quad \therefore l_n = \frac{9}{17} \left\{ 1 - \left(-\frac{8}{9}\right)^{n+1} \right\}$$





2015 年 理 系 第 3 問

2 枚 目 / 2 枚

数 理
石 井 K

3 $\triangle ABC$ において、 $\angle B$ と $\angle C$ は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き、辺 BC との交点を X_1 とし、線分 AX_1 の長さを 1 とする。また、 $BX_1 = 1$, $CX_1 = 8$ とする。各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して以下の操作を行う。

辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き、辺 AB との交点を Y_n とする。また、点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き、辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き、辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

線分 $Z_n X_{n+1}$ の長さを l_n とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) l_1 を求めよ。
- (2) l_{n+1} を l_n を用いて表せ。
- (3) $l_n > \frac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば、 $3.169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてもよい。

(3) のつづき

$$l_n > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{17} \left\{ 1 - \left(-\frac{8}{9}\right)^{n+1} \right\} > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(-\frac{8}{9}\right)^{n+1} > \frac{17}{18}$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{8}{9}\right)^{n+1} < \frac{1}{18}$$

$$n \text{ は奇数より, } \left(\frac{8}{9}\right)^{n+1} < \frac{1}{18}$$

$$\therefore \left(\frac{8}{9}\right)^n < \frac{1}{16}$$

$$n \log_2 \frac{8}{9} < \log_2 \frac{1}{16}$$

$$\therefore n(3 - \log_2 9) < -4$$

$$\therefore n > \frac{-4}{3 - \log_2 9}$$

$$\therefore n > \frac{4}{\log_2 9 - 3}$$

$$\text{ここで, } \frac{4}{3.17-3} < \frac{4}{\log_2 9-3} < \frac{4}{3.169-3} \text{ より, } 23.5 < \frac{4}{\log_2 9-3} < 23.7$$

n は奇数より、最小の n は $n = 25$ //