

2011年 第1問

1枚目/2枚

1 a を実数の定数とする. 2つの関数 $f(x) = x^2 - ax + 3$ と $g(x) = x^2 - (2a+1)x + a^2 + a$ について, 次の各問に答えよ.

- (1) すべての実数 x について, $f(x) \geq 0$ が成り立つための条件を a を用いて表せ.
 (2) $1 \leq x \leq 3$ を満たすすべての実数 x について, $f(x) > 0$ が成り立つための条件を a を用いて表せ.
 (3) $g(x) \leq 0$ を満たすすべての実数 x について, $f(x) > 0$ が成り立つための条件を a を用いて表せ.

(1) 接してもよいので, $x^2 - ax + 3 = 0$ の判別式 D が

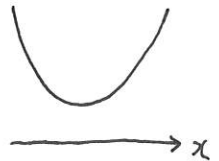
$D \leq 0$ とすればよい.

$$\therefore D = a^2 - 4 \cdot 3$$

$$= a^2 - 12$$

$$\therefore a^2 - 12 \leq 0 \text{ より}$$

$$\underline{\underline{-2\sqrt{3} \leq a \leq 2\sqrt{3}}}$$



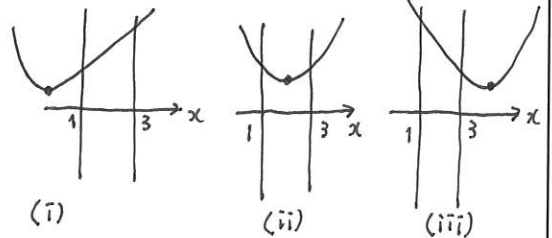
(2) (i) (頂点の x 座標) ≤ 1 のとき.

$$y = (x - \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} + 3 \text{ より}$$

$$\frac{a}{2} \leq 1 \text{ とすればよい. } a \leq 2 \text{ のとき.}$$

$$f(1) > 0 \text{ とすればよい } \therefore 4 - a > 0$$

$$\therefore a < 4, \quad a \leq 2 \text{ とあわせて } \underline{\underline{a \leq 2}}$$

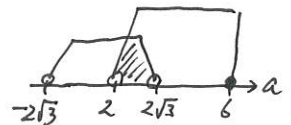


(ii). $1 < \frac{a}{2} \leq 3$, とすればよい. $2 < a \leq 6$ のとき.

$$\text{(頂点の } y \text{ 座標)} = -\frac{a^2}{4} + 3 > 0 \text{ とすればよいので } a^2 < 12$$

$$\therefore -2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}, \quad 2 < a \leq 6 \text{ とあわせて}$$

$$\underline{\underline{2 < a < 2\sqrt{3}}}$$



(iii) $a > 6$ のとき.

$$f(3) > 0 \text{ とすればよい } f(3) = 12 - 3a \quad \therefore 12 - 3a > 0 \text{ より } a < 4$$

これは $a > 6$ をみたさないので不適

(i), (ii) より. $\underline{\underline{a < 2\sqrt{3}}}$

$$\begin{matrix} | & \times & a \\ | & \times & -(a+1) \end{matrix}$$

(3) $g(x) = x^2 - (2a+1)x + a(a+1)$

$$= (x-a)(x-(a+1)) \quad \therefore g(x) \leq 0 \Leftrightarrow a \leq x \leq a+1$$

2011年 第1問

2枚目 / 2枚

1 a を実数の定数とする. 2つの関数 $f(x) = x^2 - ax + 3$ と $g(x) = x^2 - (2a+1)x + a^2 + a$ について, 次の各問に答えよ.

- (1) すべての実数 x について, $f(x) \geq 0$ が成り立つための条件を a を用いて表せ.
 (2) $1 \leq x \leq 3$ を満たすすべての実数 x について, $f(x) > 0$ が成り立つための条件を a を用いて表せ.
 (3) $g(x) \leq 0$ を満たすすべての実数 x について, $f(x) > 0$ が成り立つための条件を a を用いて表せ.

(3) のつづき.

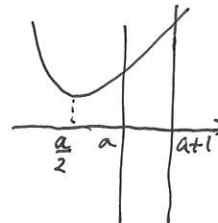
$$g(x) \leq 0 \iff a \leq x \leq a+1$$

$\therefore a \leq x \leq a+1$ をみたす x がすべて

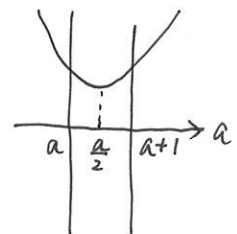
$$f(x) > 0 \text{ をみたせばよい}$$

(i) $\frac{a}{2} \leq a$ すなわち $a \geq 0$ のとき.

$$f(a) = 3 > 0 \quad \text{o.k.}$$



(i)



(ii)

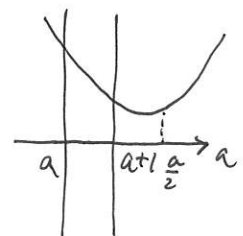
(ii) $f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + 3$
 $= -\frac{a^2}{4} + 3$

$$a < \frac{a}{2} \leq a+1$$

$$\text{すなわち } -2 \leq a < 0 \text{ のとき}$$

$$\therefore -\frac{a^2}{4} + 3 > 0 \text{ より, } -2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$$

$$-2 \leq a < 0 \text{ とあわせて, } -2 \leq a < 0$$



(iii)

(iii) $a+1 < \frac{a}{2}$ すなわち $a < -2$ のとき

$$f(a+1) = (a+1)^2 - a(a+1) + 3$$

$$= a+4 > 0 \quad \therefore a > -4$$

$$a < -2 \text{ とあわせて, } -4 < a < -2$$

(i) ~ (iii) より

$$\underline{a > -4}$$