

2013年 理系2 第4問

数理
石井K

4 関数 $f(x) = |x-1|\sqrt{x}$ を考える.

(1) 関数 $f(x)$ は $x = \frac{\text{ク}}{\text{ケ}} \frac{1}{3}$ で極大値 $\frac{\text{コ}}{\text{サ}} \frac{2}{9} \sqrt{\frac{\text{シ}}{3}}$ をとり, $x = \text{ス}$ で極小値 セ をとる.

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸によって囲まれた図形の面積は $\frac{\text{ソ}}{\text{タ}} \frac{4}{5}$ である.

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸によって囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積は $\frac{\pi}{\text{テ}} \frac{\text{ツ}}{\text{ト}}$ である.

(1)

(i) $x \geq 1$ のとき

$$f(x) = (x-1)\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \sqrt{x} + (x-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3x-1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$x \geq 1$ なので $f'(x) > 0 \therefore f(x)$ は単調増加

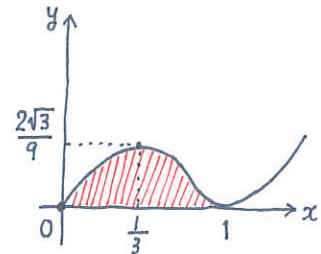
(ii) $x \leq 1$ のとき.

$$f(x) = (1-x)\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sqrt{x} + (1-x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1-3x}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\therefore f'(x) = 0 \text{ となるのは } x = \frac{1}{3}$$

x	0	...	$\frac{1}{3}$...	1	...
$f'(x)$		+	0	-		+
$f(x)$	0	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	0	↗
			極大		極小	



(i), (ii) より, $x = \frac{1}{3}$ で極大値 $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ をとり, $x = 1$ で極小値 0 をとる

$$\begin{aligned} (2) S &= \int_0^1 (1-x)\sqrt{x} dx \\ &= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) V &= \pi \int_0^1 \{(1-x)\sqrt{x}\}^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 x^3 - 2x^2 + x dx \\ &= \pi \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$