



2015年 医学部 第2問

2 a を正の定数とし,

$$x = a \cos \theta - \cos 2\theta, \quad y = a \sin \theta + \sin 2\theta \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3})$$

で表される曲線を C とする。曲線 C が点 $P(1, 2)$ を通るとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 定数 a の値を求めよ。
- (2) 点 P における曲線 C の接線を l とする。 l の方程式を求めよ。
- (3) 曲線 C と直線 $x = 1$ および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

$$(1) \quad 1 = a \cos \theta - (2 \cos^2 \theta - 1)$$

$$\therefore \cos \theta (a - 2 \cos \theta) = 0$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ より, } \cos \theta > 0 \quad \therefore \cos \theta = \frac{a}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2 = a \sin \theta + \sin 2\theta \text{ に代入して } a \text{ を消去すると,}$$

$$2 = 2 \sin \theta \cos \theta + \sin 2\theta$$

$$\therefore \sin 2\theta = 1 \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{4} \quad \textcircled{1} \text{ より, } \underline{a = \sqrt{2}} \text{ 〃}$$

$$(2) \quad \frac{dx}{d\theta} = -\sqrt{2} \sin \theta + 2 \sin 2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \sqrt{2} \cos \theta + 2 \cos 2\theta$$

 \therefore 点 P において

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot 0}{-\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot 1} = 1$$

 $\theta = \frac{\pi}{4}$ を代入

$$\therefore l: y = 1 \cdot (x - 1) + 2$$

$$\therefore l: \underline{y = x + 1} \text{ 〃}$$

$$(3) \quad \frac{dx}{d\theta} = \sqrt{2} \sin \theta (2\sqrt{2} \cos \theta - 1) > 0 \quad (0 < \theta \leq \frac{\pi}{3})$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \sqrt{2} \cos \theta + 2 \cos 2\theta > 0 \quad (0 < \theta \leq \frac{\pi}{3})$$

 $\therefore 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ において $y = 0$ と交るのは、

 $\theta = 0$ のときのみで、座標は $(\sqrt{2} - 1, 0)$

$$\therefore S = \int_{\sqrt{2}-1}^1 y \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} y \cdot \frac{dx}{d\theta} \cdot d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{2} \sin \theta + \sin 2\theta)(-\sqrt{2} \sin \theta + 2 \sin 2\theta) \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -2 \sin^2 \theta + \sqrt{2} \sin \theta \sin 2\theta + 2 \sin^2 2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -2 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + 2\sqrt{2} \sin^2 \theta \cos \theta + 2 \cdot \frac{1 - \cos 4\theta}{2} \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta + 2\sqrt{2} \sin^2 \theta \cos \theta - \cos 4\theta \, d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin^3 \theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{5}{6}}} \text{ 〃}$$

