2011 年 医学部 第 4 問

$\boxed{4}$ xy 平面において原点 O(0, 0) を中心とする半径 1 の円を S とし，円 S の任意の点 P に対して，点 P における円 S の接線を L(P) とおく．

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を全ての成分が実数からなる 2 行 2 列の行列とし，A によって定まる xy 平面の一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を φ とおく．このとき，円 S の任意の点 P に対して円 S の点 Q が存在し，接線 L(P) のいかなる点も φ によって接線 L(Q) の点に移されると仮定する．

(1) 円 S の点 P の座標を $(s,\ t)$ として，接線 L(P) の方程式を求めよ．

(2) 行列 A は逆行列を持つことを証明せよ．

(3) 円 S の点 Q は円 S の点 P により一意的に定まることを示し，点 Q の座標 $(u,\ v)$ を点 P の座標 $(s,\ t)$ 及び行列 A の成分 a, b, c, d を用いて表示せよ．

(4) xy 平面の一次変換 φ は，原点 O(0, 0) を中心とする回転か，または原点 O(0, 0) を通るある直線 ℓ を対称軸とする対称変換のいずれかであることを証明せよ．