# 高知大学

2010年 第4問

1枚目／2枚

数理 石井K

4 $k$ と $l$ を実数の定数とし，$x$ に関する方程式

$$x^4-2(k-l)x^2+(k^2+l^2-6k-8l)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 方程式①で $k=2,\ l=1$ としたときの解を求めよ．
(2) 方程式①が実数解を持たないための必要十分条件を $k$ と $l$ で表せ．
(3) 方程式①の異なる実数解の個数が3つであるような実数の組 $(k,\ l)$ を座標平面上に図示せよ．
(4) 方程式①の異なる実数解の個数がただ1つであるような整数の組 $(k,\ l)$ をすべて求めよ．

(1) ①に $k=2,\ l=1$ を代入すると．

$x^4-2x^2-15=0 \quad \therefore (x^2-5)(x^2+3)=0 \quad \therefore \underline{x=\pm\sqrt{5},\ \pm\sqrt{3}i}$ //

(2) $t=x^2$ とおくと．$(t \geqq 0)$

①が実数解をもたない $\Longleftrightarrow t^2-2(k-l)t+(k^2+l^2-6k-8l)=0 \quad \cdots②$ が0以上の実数解をもたない．

$\Longleftrightarrow$ 判別式を $D$ とおくと．

ここで②の左辺を $f(t)$ とした．

$D<0$ または．（軸 $<0$ かつ $f(0)>0$）

$\Longleftrightarrow \dfrac{D}{4}=(k-l)^2-(k^2+l^2-6k-8l)<0$

または．

$(k-l<0$ かつ $k^2+l^2-6k-8l>0)$

$\Longleftrightarrow -2kl+6k+8l<0$

または

$(k<l$ かつ $k^2+l^2-6k-8l>0)$

答え方は1通りではない
（答えは複数ある）

$\Longleftrightarrow \underline{kl-3k-4l>0 \text{ または } (k<l \text{ かつ } k^2+l^2-6k-8l>0)}$ //

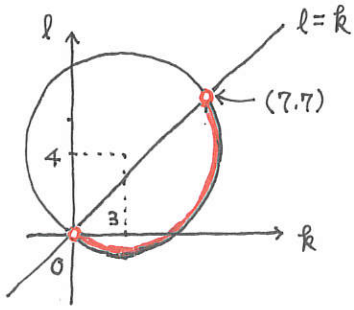
(3) $f(t)=0$ が $t=0$ と正の解をもつときなので

$f(0)=0$ かつ 軸 $>0$

$\therefore k^2+l^2-6k-8l=0$ かつ $k-l>0$

$\therefore (k-3)^2+(l-4)^2=5^2$ かつ $l<k$

∴ 右図の赤線部分 $(0,0)$ と $(7,7)$ は含まない



0000331638669999

# 高知大学

2010年 第4問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ $k$ と $l$ を実数の定数とし，$x$ に関する方程式

$$x^4-2(k-l)x^2+(k^2+l^2-6k-8l)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 方程式①で $k=2$, $l=1$ としたときの解を求めよ．
(2) 方程式①が実数解を持たないための必要十分条件を $k$ と $l$ で表せ．
(3) 方程式①の異なる実数解の個数が3つであるような実数の組 $(k, l)$ を座標平面上に図示せよ．
(4) 方程式①の異なる実数解の個数がただ1つであるような整数の組 $(k, l)$ をすべて求めよ．

(4) $f(t)=0$ が 0 と 0以下の解をもつとき（0（重解）または，0と負の解．）

なので：

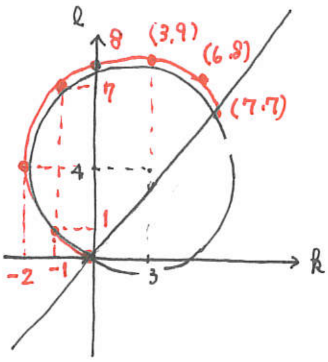
$f(0)=0$ かつ 軸 $\leqq 0$

$\Leftrightarrow$ $k^2+l^2-6k-8l=0$ かつ $k-l\leqq 0$

$\Leftrightarrow$ $(k-3)^2+(l-4)^2=5^2$ かつ $l\geqq k$

∴ 円周上の点で (3) で求めた反対側となる．

このとき．$-2\leqq k\leqq 7$ であるから．各 $k$ について調べると．




$(k, l)=(-2,4), (-1,1), (-1,7), (0,0), (0,8), (3,9), (6,8), (7,7)$ //

補足

各 $k$ について調べるとは，

例えば $k=5$ のときは，

$k^2+l^2-6k-8l=0$ に代入して，

$l^2-8l-5=0$ ∴ $l$：整数とならず，不適．

$k=6$ のときは，

$l^2-8l=0$ ∴ $l(l-8)=0$ 　$l\geqq k$ より $l=8$ ∴ $(k, l)=(6,8)$

というように調べればよい．もちろん図形的に明らかな点は省略してよい．