高知大学

2014年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を $a_n{}^2 - b_n \geqq 0$ ($n = 1, 2, \cdots$) となる数列とし，3次関数

$$y = x^3 + 3a_n x^2 + 3b_n x + 1$$

のグラフの接線の傾きが0となる接点の x 座標のうち小さくない方を c_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が $a_n = n$, $b_n = n^2$ で与えられる数列のとき，$\{c_n\}$ を求めよ．

(2) $\{b_n\}$ を初項も公差も0である等差数列とする．このとき，$c_n = b_n$ ($n = 1, 2, \cdots$) となるための条件を求めよ．

(3) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ をそれぞれ公比が r, r^2 の等比数列とする．このとき，$\{c_n\}$ が等比数列になるための条件を求めよ．

(4) $\{a_n\}$ が初項100，公差 -3 の等差数列で，$\{b_n\}$ は初項396，公差 -12 の等差数列のとき，$\{c_n\}$ を求めよ．

(1) $y = x^3 + 3nx^2 + 3n^2x + 1$ $\quad \therefore y' = 3x^2 + 6nx + 3n^2$

$\therefore y' = 3(x+n)^2$ $\quad \therefore \underline{c_n = -n}$

(2) $y' = x^3 + 3a_n x^2 + 1$ $\quad \therefore y' = 3x^2 + 6a_n x$

$\therefore y' = 3x(x + 2a_n)$ $\quad \therefore c_n = b_n = 0$ となるのは．$\underline{a_n \geqq 0}$

(3) $a_n = a \cdot r^{n-1}$, $b_n = b \cdot r^{2n-2}$ とおくと，$y = x^3 + 3ar^{n-1} \cdot x^2 + 3b \cdot r^{2n-2} \cdot x + 1$

$\therefore y' = 3x^2 + 6a \cdot r^{n-1} x + 3b \cdot r^{2n-2}$

$= 3(x^2 + 2ar^{n-1}x + br^{2n-2})$ $\quad \therefore y' = 0$ となるのは．$x = \dfrac{-2ar^{n-1} \pm 2\sqrt{a^2r^{2n-2} - br^{2n-2}}}{2}$

$\therefore x = -ar^{n-1} \pm |r|^{n-1}\sqrt{a^2 - b}$ $\quad$ ここで，$a_n^2 - b_n \geqq 0$ より $a^2 - b \geqq 0$

$\therefore c_n = -ar^{n-1} + |r|^{n-1}\sqrt{a^2 - b}$

(i) $r \geqq 0$ のとき．$c_n = (\sqrt{a^2 - b} - a)r^{n-1}$ $\quad \therefore$ 公比 r の等比数列

(ii) $r < 0$ のとき．$c_n = -ar^{n-1} + (-r)^{n-1}\sqrt{a^2 - b}$ $\quad \therefore a = 0$ または $a^2 = b$ のとき．c_n は等比数列．

(i).(ii)より．$\underline{r \geqq 0 \text{ または．} a_1 = 0 \text{ または } a_1^2 = b_1}$

(4) $a_n = 103 - 3n$, $b_n = 408 - 12n$ $\quad \therefore y = x^3 + 3(103 - 3n)x^2 + 3(408 - 12n)x + 1$

$\therefore y' = 3(x+2)(x + 204 - 6n)$ $\quad \therefore c_n = \begin{cases} -2 & (n \leqq 33 \text{ のとき}) \\ 6n - 204 & (n \geqq 34 \text{ のとき}) \end{cases}$