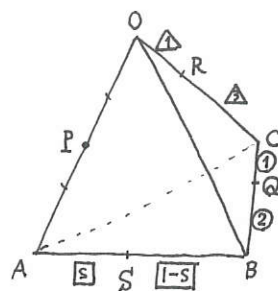




2015年教育学部第3問

3 四面体OABCにおいて、辺OAの中点をP、辺BCを2:1に内分する点をQ、辺OCを1:3に内分する点をR、辺ABをs:(1-s)に内分する点をSとする。ただし、 $0 < s < 1$ とする。また、 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1) \vec{PQ} を \vec{a} , \vec{b} および \vec{c} で表せ。
 (2) \vec{RS} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} およびsで表せ。
 (3) 線分PQと線分RSが交わるときのsの値を求めよ。

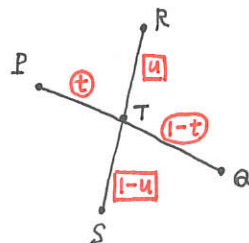


$$(1) \vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}, \vec{OQ} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{PQ} &= \vec{OQ} - \vec{OP} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

$$(2) \vec{OR} = \frac{1}{4}\vec{c}, \vec{OS} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{RS} &= \vec{OS} - \vec{OR} \\ &= (1-s)\vec{a} + s\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c} \end{aligned}$$



(3) 線分PQと線分RSの交点をTとし、

$$PT:TQ = t:1-t \quad (0 < t < 1), \quad RT:TS = u:1-u \quad (0 < u < 1) \text{ とおく}$$

$$T \text{ が線分PQ上の点であることより, } \vec{OT} = t\vec{OQ} + (1-t)\vec{OP}$$

$$\therefore \vec{OT} = \frac{1}{2}(1-t)\vec{a} + \frac{1}{3}t\vec{b} + \frac{2}{3}t\vec{c} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$T \text{ が線分RS上の点であることより, } \vec{OT} = u\vec{OS} + (1-u)\vec{OR}$$

$$\textcircled{1} \text{ と } \textcircled{2} \text{ の } \therefore \vec{OT} = (1-s)u\vec{a} + su\vec{b} + \frac{1}{4}(1-u)\vec{c} \quad \dots \textcircled{2}$$

\vec{a} , \vec{b} , \vec{c} は1次独立より、係数を比較して、

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(1-t) = (1-s)u & \dots \textcircled{3} \\ \frac{1}{3}t = su & \dots \textcircled{4} \\ \frac{2}{3}t = \frac{1}{4}(1-u) & \dots \textcircled{5} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \text{ より } \frac{1}{2} - \frac{1}{6}t = u \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5} \text{ にこれを代入して, } \frac{2}{3}t = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}t\right) \quad \therefore t = \frac{1}{5}$$

$$\text{このとき } \textcircled{6} \text{ より } u = \frac{7}{15}$$

$$\textcircled{4} \text{ に代入して, } \underline{s = \frac{1}{7}} //$$