高知大学

2015 年 第 1 問　　1枚目／2枚　　数理 石井K

$\boxed{1}$ 方程式 $x^2+y^2+2kx-4ky+10k-20=0$ の表す図形 C を考える．ただし，k は実数とする．次の問いに答えよ．

(1) 図形 C は円であることを示せ．
(2) 図形 C は k がどのような値であっても定点を通る．その定点の座標を求めよ．
(3) 図形 C で囲まれる部分の面積の最小値を求めよ．
(4) 図形 C と直線 $y=x-2$ の共有点の個数を求めよ．

(1) C : $(x+k)^2+(y-2k)^2=5(k^2-2k+4)$

ここで，$k^2-2k+4=(k-1)^2+3>0$ であるから，

C は中心が $(-k,\ 2k)$ で半径が $\sqrt{5(k^2-2k+4)}$ の円である ■

(2) $x^2+y^2-20+2k(x-2y+5)=0$ …(*)

$$\begin{cases} x^2+y^2-20=0 & \cdots ① \\ x-2y+5=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①，② より $(x,y)=\underline{(-1\pm2\sqrt{3},\ 2\pm\sqrt{3})\ (複号同順)}$ //

逆にこのとき (*) は常に成り立つ

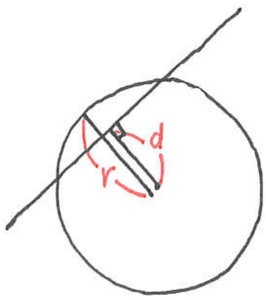
(3) C で囲まれる部分の面積を S とすると，

(1) より，$S=\pi\cdot5(k^2-2k+4)$
$=5\pi\{(k-1)^2+3\}$

∴ 最小値は $\underline{15\pi\ (k=1 のとき)}$ //

(4) C の中心と $y=x-2$ のキョリは，点と直線のキョリ公式より，

$$d=\frac{|-k-2k-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|3k+2|}{\sqrt{2}}$$



円の半径を r とすると

$$\begin{cases} r>d & \cdots 共有点は2個. \\ r=d & \cdots \quad 1個（接する） \\ r<d & \cdots \quad 0個. \end{cases}$$

2枚目につづく

0002076453297999

高知大学

2015年 第1問　　2枚目／2枚

数理 石井K

1 方程式 $x^2+y^2+2kx-4ky+10k-20=0$ の表す図形 C を考える．ただし，k は実数とする．次の問いに答えよ．

(1) 図形 C は円であることを示せ．

(2) 図形 C は k がどのような値であっても定点を通る．その定点の座標を求めよ．

(3) 図形 C で囲まれる部分の面積の最小値を求めよ．

(4) 図形 C と直線 $y=x-2$ の共有点の個数を求めよ．

(4) のつづき

$r>d$ となるのは．$\sqrt{5(k^2-2k+4)} > \dfrac{|3k+2|}{\sqrt{2}}$

∴ 両辺とも正なので 2乗して．

$$5(k^2-2k+4) > \frac{9k^2+12k+4}{2}$$

$$\therefore \quad k^2-32k+36>0$$

これを解いて．$k<16-2\sqrt{55}$，$16+2\sqrt{55}<k$

同様に $r=d$ と $r<d$ の場合も求めると．

$$\begin{cases} k<16-2\sqrt{55},\ 16+2\sqrt{55}<k \text{ のとき } 2\text{個} \\ k=16\pm2\sqrt{55} \text{ のとき } 1\text{個} \\ 16-2\sqrt{55}<k<16+2\sqrt{55} \text{ のとき } 0\text{個} \end{cases} \quad \text{——}//$$