



2012年医学部第1問

1 関数 $f(x) = \cos \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 5}{3}$ の $-1 \leq x \leq 3$ における増減表を作り、最大値と最小値、およびそれらをとる x の値を求めよ。

$$f'(x) = -\frac{3x^2 - 4x - 4}{3} \sin \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 5}{3}$$

$$= -\frac{1}{3}(3x+2)(x-2) \sin \frac{(x-1)(x^2-x-5)}{3} \quad \dots (*)$$

ここで、 $g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 5}{3}$ とおくと、 $g'(x) = \frac{1}{3}(3x+2)(x-2)$

$\therefore g(x)$ の増減表は右のようになる

$\therefore -1 \leq x \leq 3$ において、

$$-1 \leq g(x) \leq \frac{175}{81} \text{ であり、}$$

$$-\pi < -1 < 0, \quad 0 < \frac{175}{81} < \pi$$

よって (*) より、 $f'(x) = 0$ となるのは、

$$x = -\frac{2}{3}, 2 \text{ のとき、} g(x) = 0 \text{ のとき、}$$

$$g(x) = 0 \text{ となるのは、} x = 1, \frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

$\therefore f'(x) = 0$ となるのは、 $x = -\frac{2}{3}, 1, 2, \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ のとき。

x	-1	...	$-\frac{2}{3}$...	1	...	2	...	$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$...	3
$f'(x)$			-	0	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$			↓		↑	↓	↑	↓	↑	↓	

極小 極大 極小 極大

$$f(-1) = \cos 2 < 0, \quad f(1) = f\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right) = 1$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \cos \frac{175}{81} < 0,$$

$$f(2) = \cos(-1) > 0, \quad f(3) = \cos \frac{2}{3} > 0$$

$\therefore f(x)$ の最大値は 1 ($x = 1, \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ のとき)、最小値は $\cos \frac{175}{81}$ ($x = -\frac{2}{3}$ のとき)

x	-1	...	$-\frac{2}{3}$...	2	...	3
$g'(x)$			+	0	-	0	+
$g(x)$	2	↑	$\frac{175}{81}$	↓	-1	↑	$\frac{2}{3}$

