2014 年 第 3 問

数理 石井K

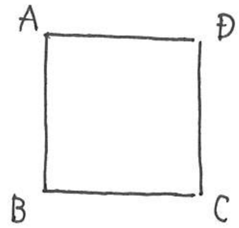
$\boxed{3}$ 空間において，原点 O を通らない平面 α 上に一辺の長さ 1 の正方形があり，その頂点を順に A，B，C，D とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{OD}$ を，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ．

(2) OA = OB = OC のとき，ベクトル

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$$

が，平面 α と垂直であることを示せ．



(1) ABCD は正方形なので対角線どうしは，それらの中点で交わる．

$$\therefore \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{2} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}}{2} \qquad \therefore \underline{\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}} \;/\!/$$

(2) BA ⊥ BC より $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$$\therefore (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0 \iff \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+1=0 \quad \cdots①$$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BA} &= 2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}) \\
&= 2(1-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}) \\
&= 0 \quad (\because ① より)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BC} &= 2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}) \\
&= 2(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+1-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}) \\
&= 0 \quad (\because ① より)
\end{aligned}$$

$\therefore$ OP ⊥ BA，OP $\cdot$ BC となり，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ は

平面 α と垂直である ▨