2014年 工学部 第4問

$\boxed{4}$ α は実数とする．行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $A=r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ と表すとき，r，θ の値を求めよ．ただし，$r>0$，$0<\theta<\pi$ とする．

(2) $B^n=\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となることを数学的帰納法を用いて示せ．

(3) $A_n=r_n\begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を $(A_n)^n=A$ により定める．ただし，$r_n>0$，$0<\theta_n<\dfrac{\pi}{n}$ とする．このとき，r_n，θ_n を n の式で表せ．

(4) (3) で定めた A_n を用いて行列 T_n を $T_n=nA_n$ により定める．点Oを原点とする座標平面上において，T_n の表す1次変換によって点 $(1,\ 0)$ が移される点を P_n とするとき，$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積 S_n を n の式で表せ．また，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．