富山大学

2014年 薬学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 実数を成分とする2次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$T(A)=a+d$，$\Delta(A)=ad-bc$ と定める．このとき，次の問いに答えよ．ただし，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．

(1) 等式 $A^2-T(A)A+\Delta(A)E=O$ が成り立つこと（ハミルトン・ケーリーの定理）を示せ．

(2) 実数を成分とする2次の正方行列 X，Y が $XY-YX=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たすとし，$\alpha=T(X)$，$\beta=\Delta(X)$ とおく．

(i) X^2Y-YX^2 を α を用いて表せ．

(ii) $(X^2Y-YX^2)^2=E$，$X^4+X^2+E=O$ が成り立つとき，α，β の値を求めよ．

(1) $A^2-T(A)A+\Delta(A)E=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-(a+d)\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+(ad-bc)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$

$=O$ ▨

(2)(i) (1)より，$X^2=\alpha X-\beta E$ なので，

$X^2Y-YX^2=(\alpha X-\beta E)Y-Y(\alpha X-\beta E)$

$=\alpha(XY-YX)$

$=\underline{\alpha\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$ //

(ii) (i)より，$(X^2Y-YX^2)^2=\alpha^2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$

$=\alpha^2E$ $\quad\therefore\ \alpha=\pm1$

$X^2=\alpha X-\beta E$ より $\quad X^4=\alpha^2X^2-2\alpha\beta X+\beta^2E$

$=X^2-2\alpha\beta X+\beta^2E$

$=(\alpha-2\alpha\beta)X+(\beta^2-\beta)E$

$\therefore\ X^4+X^2+E=(2\alpha-2\alpha\beta)X+(\beta^2-2\beta+1)E$

$=(\beta-1)\{(\beta-1)E-2\alpha X\}$ $\quad\therefore\ \beta=1$ または，$X=\dfrac{\beta-1}{2\alpha}E$

$X=\dfrac{\beta-1}{2\alpha}E$ とすると，X は E の実数倍となるから，$X=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

このとき，$\beta=\dfrac{1}{4}$ となり，$X=\dfrac{\beta-1}{2\alpha}E$ を満たさない $\quad\therefore\ \underline{(\alpha,\beta)=(\pm1,1)}$ //