鳥取大学

2014年医（医）第2問

$\boxed{2}$ 実数a, b, θに対して，行列A, Rを以下のように定める．

$$A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

またxy平面内の相異なる2点$\mathrm{P}_0(p_x,\ p_y)$および$\mathrm{Q}_0(q_x,\ q_y)$を考える．0以上の整数nに対し，行列A^nの表す1次変換による点P_0, Q_0の像をそれぞれP_n, Q_nとし，2点P_n, Q_n間の距離をD_nとする．ただしA^0は単位行列とする．

(1) D_0をp_x, p_y, q_x, q_yを用いて表せ．

(2) 正の実数sに対して，$sR=A$が成り立つとき，sをa, bを用いて表せ．

(3) D_nとD_0の比$\dfrac{D_n}{D_0}$をa, bを用いて表せ．

(1) $D_0 = P_0Q_0 = \underline{\sqrt{(p_x-q_x)^2+(p_y-q_y)^2}}$ //

(2) $sR=\begin{pmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta \\ s\sin\theta & s\cos\theta \end{pmatrix}$ より．成分を比べて．$\begin{cases} s\cos\theta = a \\ s\sin\theta = b \end{cases}$

$\therefore\ a^2+b^2 = (s\cos\theta)^2+(s\sin\theta)^2 = s^2$

$\therefore\ s>0$ より $\underline{s=\sqrt{a^2+b^2}}$ //

(3) (2)より． $A^n = s^nR^n = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$

よってA^nは原点を中心に反時計まわりに$n\theta$だけ回転移動させ．

$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n$倍拡大する移動を表す行列なので

P_nQ_nの長さは$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n$倍される．

よって $\dfrac{D_n}{D_0} = \dfrac{P_nQ_n}{P_0Q_0} = \underline{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n}$ //