

2014年 海洋科学 第1問

1 次の問に答えよ。

- (1) 3次関数 $f(x) = x^3 - x^2 + 12$ の極値を求め、 $y = f(x)$ のグラフをかけ。
 (2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{12}(a_n^3 - a_n^2 + 12) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めるとき、すべての自然数 n に対して、 $1 < a_n < 3$ が成り立つことを示せ。

- (3) $\{a_n\}$ を (2) で定められた数列とすると、すべての自然数 n に対して、 $a_{n+1} < a_n$ が成り立つことを示せ。

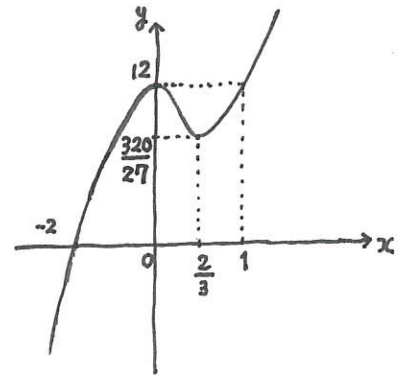
(1) $f'(x) = 3x^2 - 2x$
 $= 3x(x - \frac{2}{3})$

x	...	0	...	$\frac{2}{3}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	12	↘	$\frac{320}{27}$	↗

∴ 増減表は右のようになり。

極大値 12 ($x=0$ のとき), 極小値 $\frac{320}{27}$ ($x=\frac{2}{3}$ のとき) //

また、グラフは右のようになる。



- (2) $f(x)$ は $x \geq 1$ で単調増加より。

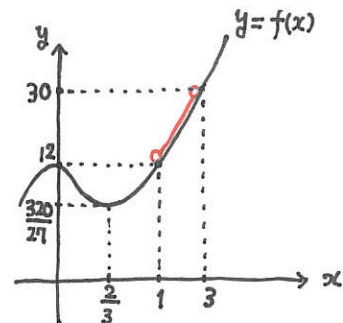
$$1 < x < 3 \text{ において, } f(1) < f(x) < f(3)$$

$$\text{すなわち, } 12 < f(x) < 30$$

$$\text{ここで, } a_{n+1} = \frac{1}{12} f(a_n) \text{ より.}$$

$$1 < a_n < 3 \text{ のとき, } 1 < a_{n+1} < \frac{5}{2} \quad \therefore 1 < a_{n+1} < 3 \text{ となる.}$$

$1 < a_1 = 2 < 3$ であるから、帰納的に $1 < a_n < 3$ が成り立つ \square



(3) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{12} a_n^3 - \frac{1}{12} a_n^2 + 1 - a_n$

$$= \frac{1}{12} (a_n - 2\sqrt{3})(a_n - 1)(a_n + 2\sqrt{3})$$

(2) より、 $1 < a_n < 3$ なので、 $a_n - 2\sqrt{3} < 0$, $a_n - 1 > 0$, $a_n + 2\sqrt{3} > 0$

∴ $a_{n+1} - a_n < 0$ ∴ すべての n に対して、 $a_{n+1} < a_n$ が成り立つ \square
↑
自然数