東京大学

2012年 理系 第5問

$\boxed{5}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件 (D) を満たすとする．

(D) A の成分 a，b，c，d は整数である．また，平面上の4点 $(0,\ 0)$，$(a,\ b)$，$(a+c,\ b+d)$，$(c,\ d)$ は，面積1の平行四辺形の4つの頂点をなす．

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 行列 BA と $B^{-1}A$ も条件 (D) を満たすことを示せ．

(2) $c=0$ ならば，A に B，B^{-1} のどちらかを左から次々にかけることにより，4個の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のどれかにできることを示せ．

(3) $|a| \geqq |c| > 0$ とする．BA，$B^{-1}A$ に少なくともどちらか一方は，それを $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると

$$|x|+|z|<|a|+|c|$$

を満たすことを示せ．