



2016年工学部第4問

4 2つの曲線 $y = x + 2\cos x$ ($\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$) と $y = x - 2\cos x$ ($\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$) をつないでできる曲線を C とする.

- (1) 曲線 C の概形を図示しなさい。
 (2) k を実数とする. 曲線 C と直線 $y = k$ が異なる2点で交わるための k の値の範囲を求めなさい。
 (3) 曲線 C で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めなさい.

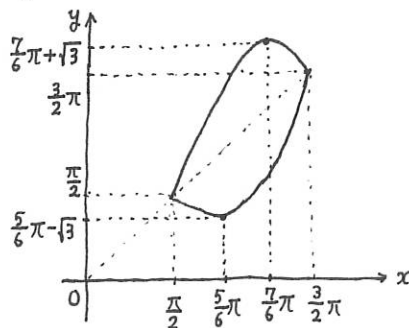
(1) $f(x) = x + 2\cos x$, $g(x) = x - 2\cos x$ とおくと,

$$f'(x) = 1 - 2\sin x, \quad g'(x) = 1 + 2\sin x$$

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi \text{ において, } f'(x) = 0 \text{ となるのは, } x = \frac{5}{6}\pi,$$

$$g'(x) = 0 \text{ となるのは, } x = \frac{7}{6}\pi$$

∴ 増減表は右のようになるので, グラフは下のようになる.



x	$\frac{\pi}{2}$...	$\frac{5}{6}\pi$...	$\frac{3}{2}\pi$	
$f'(x)$		-	0	+		
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$		\downarrow	$\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$	\nearrow	$\frac{3}{2}\pi$

x	$\frac{\pi}{2}$...	$\frac{7}{6}\pi$...	$\frac{3}{2}\pi$	
$g'(x)$		+	0	-		
$g(x)$	$\frac{\pi}{2}$		\nearrow	$\frac{7}{6}\pi + \sqrt{3}$	\downarrow	$\frac{3}{2}\pi$

(2) (1) の図より, $\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} < k < \frac{7}{6}\pi + \sqrt{3}$

$$(3) V = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x - 2\cos x)^2 dx - \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x + 2\cos x)^2 dx$$

$$= -8\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} x (\sin x)' dx$$

$$= -8\pi \left\{ [x \sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sin x dx \right\}$$

$$= -8\pi \left\{ -\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \right\}$$

$$= -8\pi (-2\pi)$$

$$= \underline{16\pi^2}$$