

2015年 医学部 第4問

4 空間内の点 O, A_1, A_2, B, C を考える. このとき, ベクトル $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}$ はともに長さが1で, 角度 θ ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$) をなす. また点 B は O, A_1, A_2 を含む平面 H 上に存在せず, ベクトル \overrightarrow{OB} は, $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OB} = c_1, \overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OB} = c_2$ を満たす (ただし c_1, c_2 はいずれも0でない実数であるとする). さらにベクトル \overrightarrow{OC} は, $\overrightarrow{OC} = c_1 \overrightarrow{OA_1} + c_2 \overrightarrow{OA_2}$ のように表され, かつベクトル \overrightarrow{CB} と垂直である. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 角度 θ を求めよ.
- (2) $|\overrightarrow{OB}|^2 > c_1^2 + c_2^2$ が成り立つことを示せ. ただし, $|\overrightarrow{OB}|$ はベクトル \overrightarrow{OB} の長さを表す.
- (3) $c_1 = c_2 = c, |\overrightarrow{OB}| = b$ とする. また, $\overrightarrow{OD_1} = c \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OD_2} = c \overrightarrow{OA_2}$ となるように, 空間上に点 D_1, D_2 を与える. 四面体 $D_1 D_2 C B$ の体積を, b, c を用いて表せ.
- (4) (3) の条件の下で3点 D_1, D_2, B により定まる平面に対し, 点 C から垂線を引いたとき, 垂線と平面の交点を T とする. このとき, CT の長さを b, c で表せ.