0002187452187999

首都大学東京

2016年 都市教養（文系） 第1問

数理
石井K

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えなさい．

(1) 次の式を展開しなさい．

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

(2) a, b, c を0以上の実数とする．次の不等式が成り立つことを示しなさい．また，等号が成り立つのはどのようなときか答えなさい．

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$ ← 相加・相乗平均 3コの場合.

(1) (与式) = $\underline{x^3+y^3+z^3-3xyz}$ //

(2) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = (x+y+z)\left\{\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2+\frac{1}{2}(z-x)^2\right\}$

よって，$x=\sqrt[3]{a}$，$y=\sqrt[3]{b}$，$z=\sqrt[3]{c}$ を(1)式に代入すると，

$$(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3+(\sqrt[3]{c})^3-3\sqrt[3]{abc} = \underline{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})\left\{\frac{1}{2}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2+\frac{1}{2}(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c})^2+\frac{1}{2}(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a})^2\right\}}$$

$\geqq 0$ （$\because a \geqq 0, b \geqq 0, c \geqq 0$ より）

したがって，$a+b+c \geqq 3\sqrt[3]{abc}$

すなわち，$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ が成り立つ．

等号成立は，波線部が0になるときなので，$a=b=c$ のとき． ▨