# 長崎大学

2014年 医学部 第4問　

数理 石井K

$\boxed{4}$ 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において，関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos x, \quad g(x) = \cos\frac{x}{2} + c$$

と定義する．$c$ は定数である．次の問いに答えよ．

(1) 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において，2曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x = 0$ 以外の点で接するように $c$ の値を定め，接点 $(p,\ q)$ を求めよ．また，そのとき，区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ における関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ の大小関係を調べよ．

(2) 定数 $c$ と接点 $(p,\ q)$ は (1) で求めたものとする．そのとき，区間 $0 \leqq x \leqq p$ において，$y$ 軸および2曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ によって囲まれた図形を $D$ とする．$D$ を $y$ 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 $V$ を求めよ．

(1) 接点において $f(x) = g(x)$，$f'(x) = g'(x)$ となるので

$\frac{1}{2}\cos x = \cos\frac{x}{2} + c \cdots ①$，$-\frac{1}{2}\sin x = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} \cdots ②$

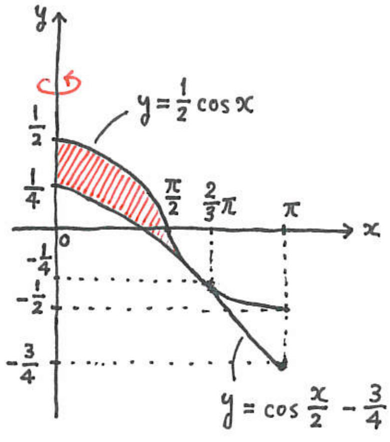
②より．$\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2} - 1\right) = 0$　　$0 \leqq \frac{x}{2} \leqq \frac{\pi}{2}$ より $\frac{x}{2} = 0,\ \frac{\pi}{3}$　　$\therefore x = 0,\ \frac{2}{3}\pi$

$x = 0$ 以外で接するので，$p = \frac{2}{3}\pi$　このとき $q = f(p) = -\frac{1}{4}$　$\therefore \underline{(p, q) = \left(\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{4}\right)}$ //

このとき①より．$c = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) - \cos\frac{\pi}{3}$　　$\therefore \underline{c = -\frac{3}{4}}$ //

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{2}\cos x - \cos\frac{x}{2} + \frac{3}{4}$$
$$= \left(\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)^2$$
$$\geqq 0$$

$\therefore \underline{f(x) \geqq g(x)}$ //




(2) $V = \pi\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} x_1^2\,dy - \pi\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} x_2^2\,dy$

$\left(y_1 = \frac{1}{2}\cos x_1,\ y_2 = \cos\frac{x_2}{2} - \frac{3}{4} \text{ とした}\right)$

$dy_1 = -\frac{1}{2}\sin x_1\,dx_1$，$dy_2 = -\frac{1}{2}\sin\frac{x_2}{2}\,dx_2$ と

| $y_1$ | $-\frac{1}{4} \to \frac{1}{2}$ |
|---|---|
| $x_1$ | $\frac{2}{3}\pi \to 0$ |

，

| $y_2$ | $-\frac{1}{4} \to \frac{1}{4}$ |
|---|---|
| $x_2$ | $\frac{2}{3}\pi \to 0$ |

より．$V = \pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{0} -\frac{1}{2}x_1^2\sin x_1\,dx_1 - \pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{0} -\frac{1}{2}x_2^2\sin\frac{x_2}{2}\,dx_2$

$$\therefore V = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{2}{3}\pi} x^2\left(\sin x - \sin\frac{x}{2}\right)dx$$

2枚目につづく

0001934455608999

# 長崎大学

2014年 医学部 第4問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において，関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos x, \quad g(x) = \cos\frac{x}{2} + c$$

と定義する．$c$ は定数である．次の問いに答えよ．

(1) 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において，2曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x = 0$ 以外の点で接するように $c$ の値を定め，接点 $(p,\ q)$ を求めよ．また，そのとき，区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ における関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ の大小関係を調べよ．

(2) 定数 $c$ と接点 $(p,\ q)$ は (1) で求めたものとする．そのとき，区間 $0 \leqq x \leqq p$ において，$y$ 軸および2曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ によって囲まれた図形を $D$ とする．$D$ を $y$ 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 $V$ を求めよ．

(2) のつづき

$$V = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{2}{3}\pi} x^2\left(-\cos x + 2\cos\frac{x}{2}\right)' dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[x^2\left(-\cos x + 2\cos\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\frac{2}{3}\pi} - \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{2}{3}\pi} 2x\left(-\cos x + 2\cos\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{\frac{4}{9}\pi^2\left(\frac{1}{2}+1\right)\right\} - \pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi} x\left(-\sin x + 4\sin\frac{x}{2}\right)' dx$$

$$= \frac{\pi^3}{3} - \pi\left[x\left(-\sin x + 4\sin\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\frac{2}{3}\pi} + \pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi} -\sin x + 4\sin\frac{x}{2}\, dx$$

$$= \frac{\pi^3}{3} - \pi\left\{\frac{2}{3}\pi\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}\right)\right\} + \pi\left[\cos x - 8\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$= \underline{\frac{\pi^3}{3} - \sqrt{3}\pi^2 + \frac{5}{2}\pi} \;/\!/$$