神戸大学

2015年 第2問　　1枚目／2枚

2　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が $a_1=5$, $b_1=7$ をみたし，さらにすべての実数 x とすべての自然数 n に対して

$$x(a_{n+1}x+b_{n+1})=\int_{c_n}^{x+c_n}(a_nt+b_n)\,dt$$

をみたすとする．以下の問に答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $c_n=3^{n-1}$ のとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $c_n=n$ のとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) 与式の右辺は，

$$\int_{c_n}^{x+c_n}(a_nt+b_n)\,dt=\left[\frac{1}{2}a_nt^2+b_nt\right]_{c_n}^{x+c_n}$$

$$=\frac{1}{2}a_n(x+c_n)^2+b_n(x+c_n)-\frac{1}{2}a_nc_n^2-b_nc_n$$

$$=\frac{1}{2}a_nx^2+a_nc_nx+b_nx$$

一方，左辺は，

$$x(a_{n+1}x+b_{n+1})=a_{n+1}x^2+b_{n+1}x$$

与式が x についての恒等式であることから，係数を比較して，

$$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n & \cdots① \\ b_{n+1}=a_nc_n+b_n & \cdots② \end{cases}$$

① と $a_1=5$ より，$\{a_n\}$ は初項 5，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列　∴ $a_n=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\underline{\frac{5}{2^{n-1}}}$ //

(2) (1) と ② より，

$$b_{n+1}=\frac{5}{2^{n-1}}\cdot3^{n-1}+b_n$$

$$\therefore\ b_{n+1}-b_n=5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

∴ $n\geqq2$ のとき，$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$

$$=7+5\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{3}{2}}$$

$$=\underline{-3+10\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}\ //$$

（これは $n=1$ のときも成り立っている）

2015年第2問　2枚目／2枚

数理石井K

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が $a_1=5$, $b_1=7$ をみたし，さらにすべての実数 x とすべての自然数 n に対して

$$x(a_{n+1}x+b_{n+1})=\int_{c_n}^{x+c_n}(a_nt+b_n)\,dt$$

をみたすとする．以下の問に答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $c_n=3^{n-1}$ のとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $c_n=n$ のとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) (2) と同様に ② より

$$b_{n+1}-b_n=\frac{5}{2^{n-1}}\cdot n$$

$\therefore$ $n\geqq 2$ のとき．$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{5k}{2^{k-1}}$ $\cdots$ ③

ここで，$S=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{k-1}}$ $(n\geqq 2)$ とおくと，

$$S=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{n-1}{2^{n-2}} \quad\cdots ④$$

$$\frac{1}{2}S=\quad\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n-2}{2^{n-2}}+\frac{n-1}{2^{n-1}} \quad\cdots ⑤$$

④－⑤ より．$\frac{1}{2}S=\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}}_{\text{初項}1,\ \text{公比}\frac{1}{2}\text{の等比数列の和}}-\frac{n-1}{2^{n-1}}$

$$\therefore\ \frac{1}{2}S=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n-1}{2^{n-1}}$$

$$\therefore\ S=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}-(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$=4-\frac{n+1}{2^{n-2}}$$

$\therefore$ ⑤ に代入して．

$$b_n=7+5\left(4-\frac{n+1}{2^{n-2}}\right)\quad(n\geqq 2)$$

$$=\underline{27-5(n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}$$ //　（これは $n=1$ のときも成り立っている）