0001638721638999

神戸大学

2014 年 第 5 問

数理 石井K

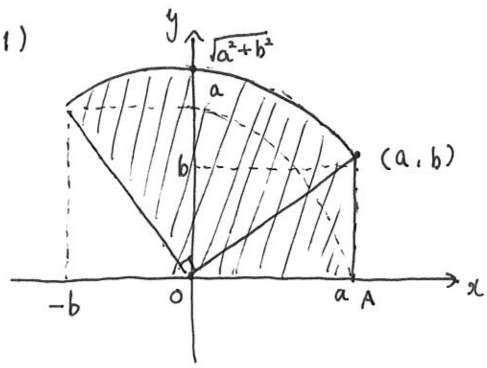
5 a, b を正の実数とし，xy 平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(a,\ 0)$，B$(a,\ b)$ をとる．三角形 OAB を，原点 O を中心に 90° 回転するとき，三角形 OAB が通過してできる図形を D とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) D を xy 平面上に図示せよ．

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(3) $a+b=1$ のとき，(2) で求めた V の最小値と，そのときの a の値を求めよ．

(1)



(2) $x^2+y^2=a^2+b^2$　　$y=\sqrt{a^2+b^2-x^2}$

$$V=\pi\int_{-b}^{a}a^2+b^2-x^2\,dx-\frac{1}{3}\cdot\pi a^2\times b$$

$$=\pi\left[(a^2+b^2)x-\frac{x^3}{3}\right]_{-b}^{a}-\frac{\pi a^2 b}{3}$$

$$=\pi\left\{a(a^2+b^2)-\frac{a^3}{3}+(a^2+b^2)b-\frac{b^3}{3}\right\}-\frac{\pi a^2 b}{3}$$

$$=\underline{\frac{\pi}{3}(2a^3+3ab^2+2a^2b+2b^3)}$$

(3) $a+b=1$ のとき

$$V(a)=\frac{\pi}{3}\cdot(a^3+2a^2-3a+2)$$

$$\therefore V'(a)=\frac{\pi}{3}(3a^2+4a-3)$$

$3a^2+4a-3=0$ となるのは $a=\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$ （$\because a>0$）

a	(0)	…	$\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$	…	(1)
$V'(a)$		$-$	0	$+$	
$V(a)$		↘		↗	

$\alpha=\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$ とおくと，$3\alpha^2+4\alpha-3=0$　$\therefore \alpha^3+\frac{4}{3}\alpha^2-\alpha=0$　$\therefore V\left(\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right)=\underline{\frac{124-26\sqrt{13}}{81}\pi}$

(3) は $\alpha\left(=\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right)$ が $V'(a)=0$ の解であることから，$3\alpha^2+4\alpha-3=0$ を使って $V(\alpha)$ の次数下げをした。そのまま代入すると，とてつもない計算量になるので注意