神戸大学

2014年 第2問

$\boxed{2}$ $m,\ n\ (m<n)$ を自然数とし，

$$a=n^2-m^2,\quad b=2mn,\quad c=n^2+m^2$$

とおく．三辺の長さが $a,\ b,\ c$ である三角形の内接円の半径を r とし，その三角形の面積を S とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $a^2+b^2=c^2$ を示せ．

(2) r を $m,\ n$ を用いて表せ．

(3) r が素数のときに，S を r を用いて表せ．

(4) r が素数のときに，S が 6 で割り切れることを示せ．

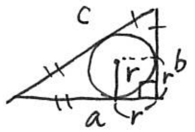
(1) $a^2+b^2=(n^2-m^2)^2+(2mn)^2$

$=n^4+2m^2n^2+m^4$

$=(n^2+m^2)^2$

$=c^2$ ▨

(2) (1)より．この三角形は直角三角形 （cが斜辺）



∴ この三角形の周りの長さ l は

$l=a+b+c$

また $l=2c+2r$ と表せるので

$2r=a+b-c$

$=(n^2-m^2)+2mn-n^2-m^2$

$=2mn-2m^2$

∴ $r=mn-m^2$ //

(3) (2)より．$r=m(n-m)$

rが素数のとき．

$m=1$ または $n-m=1$

● $m=1$ のとき．

$r=n-1$ より．

$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$

$=(n+n^2)r$

$=(r+1)(r+2)r$

● $n-m=1$ のとき

$r=m$ より，$n=r+1$

$S=\frac{1}{2}(2n^2+2mn)r$

$=r(r+1)(2r+1)$

以上より．
$$S=\begin{cases} r(r+1)(r+2) & (m=1\text{のとき}) \\ r(r+1)(2r+1) & (n-m=1\text{のとき}) \end{cases}$$ //

(4) $m=1$ のときは

$S=r(r+1)(r+2)$

$r,\ r+1,\ r+2$ は連続する3つの整数なので 偶数と3の倍数を含み．S は 6 で割り切れる

$n-m=1$ のとき

同様に S は偶数である

(i) rが3の倍数なら S は6で割り切れる

(ii) $r=3k+1$ (k：整数)のとき

$2r+1=6k+3$ ∴ Sは 3 で割れる

よって Sは 6 で割り切れる

(iii) $r=3k+2$ (kは整数) のとき

$r+1=3(k+1)$ ∴ Sは6で割り切れる

以上より Sは 6 で割り切れる ▨