0001823276718999

琉球大学

2014年 第1問　普 2個

数理 石井K

1 次の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$ を求めよ．

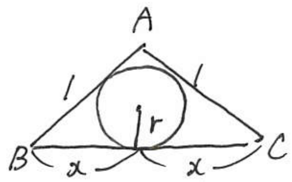
(2) AB = AC = 1 である二等辺三角形 ABC において，BC = $2x$，内接円の半径を r とおく．

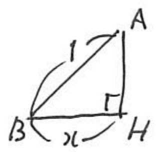
① r を x を用いて表せ．

② r が最大となる x の値を求めよ（最大値そのものは求める必要はない）．

(1)
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'dx$$
$$= \left[\frac{x}{2}\cdot\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$
$$= \frac{\pi}{8} - \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{\pi-2}{8}$$

(2)
①





△ABCの面積Sは，rを用いると．$S = \frac{1}{2}\cdot r(2+2x) = r(1+x)$ ―①

AからBCに垂線を下ろし，交点をHとおくと．

$AH^2 + x^2 = 1$ より $AH = \sqrt{1-x^2}$　$\therefore S = \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\sqrt{1-x^2}$

$= x\sqrt{1-x^2}$ ―②

①，②より．$r(1+x) = x\sqrt{1-x^2}$

$$\therefore r = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x}$$

② $r^2 = \frac{x^2(1-x)(1+x)}{(1+x)^2}$　$\therefore r^2 = \frac{x^2(1-x)}{1+x}$

これをf(x)とおいた

$f'(x) = \frac{(2x-3x^2)(x+1) - x^2(1-x)}{(x+1)^2}$

$= \frac{-2x(x^2+x-1)}{(x+1)^2}$

$x>0$ より $f'(x)=0$ となるのは

$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき

(3)のつづき．

x	0	…	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	…
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗		↘

したがって

$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$