2016年 商学部 第2問

2 a を正の実数，b，c を実数とする．$f(x)=ax^2+bx+c$ とし，$f'(x)$ を $f(x)$ の導関数とする．

(1) 放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=f'(x)$ が接するための必要十分条件は

$$b^2 = \boxed{\text{ウ}} \qquad \cdots\cdots\text{(A)}$$

である．

(2) 条件(A)が成り立つとき，その接点の座標は

$$\left(\boxed{4} - \frac{b}{\boxed{5}\,a},\ \boxed{6}\,a\right)$$

である．このとき，直線 $y=f'(x)$ は放物線 $y=-f(x)$ とも接し，その接点Pの座標は

$$\left(\boxed{7}\boxed{8} - \frac{b}{\boxed{9}\,a},\ \boxed{10}\boxed{11}\,a\right)$$

である．

(3) 直線 $y=f'(x)$ が原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円Oと接するための必要十分条件は

$$b^2 = \boxed{\text{エ}} \qquad \cdots\cdots\text{(B)}$$

である．この条件が成り立つとき，その接点をQとする．

(4) 条件(A)，(B)が成り立ち，さらに点Pが点Qと一致するのは，

$$a = \frac{\boxed{12}}{\boxed{13}},\quad b = \boxed{14}\boxed{15},\quad c = \frac{\boxed{16}}{\boxed{17}}$$

のときである．このとき，円Oは放物線 $y=f(x)$ とただ1つの共有点 $(\boxed{18},\ \boxed{19})$ をもち，放物線 $y=f(x)$，直線 $y=f'(x)$ および円Oで囲まれた図形の面積は

$$\frac{\boxed{20}}{\boxed{21}} - \frac{\boxed{22}}{\boxed{23}}\pi$$

である．