

2014年第25問

数理  
石井K

25 点  $P(\cos^4\theta, -\sin^4\theta)$  ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) の軌跡を曲線  $C$  とし,  $\theta = \frac{\pi}{6}$  における曲線  $C$  の接線を直線  $L$  とする. 曲線  $C$ , 直線  $L$ ,  $y$  軸で囲まれた面積を  $S$  とする.  $128S$  の値を求めよ.

$P(x, y)$  と表すと,  $x = \cos^4\theta$ ,  $y = -\sin^4\theta$  なるので,

$$\sqrt{x} + \sqrt{-y} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad \therefore y = 2\sqrt{x} - 1 - x$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -4\cos^3\theta \sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = -4\sin^3\theta \cos\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \tan^2\theta (\geq 0), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2\tan\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} (\leq 0)$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき, } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{また, } \theta \text{ のとき, } x = \frac{9}{16}, y = -\frac{1}{16} \text{ より, } L: y = \frac{1}{3}\left(x - \frac{9}{16}\right) - \frac{1}{16}$$

$$\therefore L: y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}$$

$$S = \int_0^{\frac{9}{16}} \left( \frac{1}{3}x - \frac{1}{4} - (2\sqrt{x} - 1 - x) \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{9}{16}} \left( \frac{4}{3}x + \frac{3}{4} - 2\sqrt{x} \right) dx$$

$$= \left[ \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{9}{16}}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{81}{16^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{16} - \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{3}{4}$$

$$= \frac{27}{128} + \frac{27}{64} - \frac{9}{16}$$

$$= \frac{27+54-72}{128}$$

$$= \frac{9}{128}$$

$$\therefore 128S = \underline{\underline{9}}$$

