広島大学

2014年 理系 第1問

$\boxed{1}$ a，b を実数，$a>0$ として，行列 $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix}$ の定める1次変換を f とする．f によって，点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ が点 P_1 に移され，点 P_1 が点 P_2 に移されるものとする．P が線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の中点であるとき，次の問いに答えよ．

(1) a，b を求めよ．

(2) ある実数 c に対して $c\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=(v_1,\ v_2)$ とすると，

$$A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．c を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PP}_1}=(w_1,\ w_2)$ とする．すべての自然数 n に対して

$$A^n\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=(-2)^n\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ．

(4) (2)と(3)の v_1，v_2，w_1，w_2 に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s(v_1,\ v_2)+t(w_1,\ w_2)$ となる実数 s，t を求め，$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を n を用いて表せ．ただし，n は自然数である．