

2014年第4問

4 行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  について、以下の問いに答えよ。

(1)  $A \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$  を満たす実数  $a, k$  の値を求めよ。

(2) 行列  $P = \begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 0 \end{pmatrix}$  が  $AP = P \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$  を満たすとき、実数  $p, q, r$  の値を求めよ。

(3) 自然数  $n$  に対して、行列  $B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$  の  $n$  個の積  $B^n$  が

$$B^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$$

となることを証明せよ。ただし、 $\alpha$  は 0 と異なる実数とする。

(4) 自然数  $n$  に対して、 $A$  の  $n$  個の積  $A^n$  を求めよ。

(5) 自然数  $n$  に対して、実数  $x_n, y_n$  を  $A^n = x_n A + y_n E$  を満たすように定めるとき、 $x_n, y_n$  を  $n$  を用いて表せ。ただし、 $E$  は 2 次の単位行列とする。