



2012年 第1問

数理
石井K

1 次の空欄をうめよ.

(1) 次の積分を求めよ.

$$(i) \int_1^4 \sqrt{x} dx = \boxed{\frac{14}{3}}$$

$$(ii) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$(1)(i) (\text{与式}) = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx \\ = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\ = \frac{14}{3}$$

$$dt = \cos x dx$$

$$x \parallel 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ t \parallel 0 \rightarrow 1$$

$$\therefore (\text{与式}) = \int_0^1 t^2 dt \\ = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ = \frac{1}{3}$$

(ii) $t = \sin x$ とおいて置換積分(2) 2つのベクトル $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (2, -1)$ に対して, $|\vec{a} + t\vec{b}|$ は $t = \boxed{\frac{1}{5}}$ のとき, 最小値 $\boxed{\frac{7\sqrt{5}}{5}}$ をとる.(3) $0 \leq \theta \leq \pi$ において $\sin 2\theta - 2\cos \theta = 0$ のとき, $\theta = \boxed{\frac{\pi}{2}}$ である.(4) 不等式 $\log_3(2x-3) < 2$ をみたす x の値の範囲は $\boxed{\frac{3}{2} < x < 6}$ である.(5) 4つの袋があり, 各袋に赤, 青, 黄の玉が1つずつ入っている. 各袋から1つずつ玉を取り出すとき, 取り出した4つの玉がすべて同じ色である確率は $\boxed{\frac{1}{27}}$ であり, 2種類の色である確率は $\boxed{\frac{14}{27}}$ である.

$$(2) |\vec{a}| = \sqrt{10}, |\vec{b}| = \sqrt{5}, \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 3 = -1$$

$$\therefore |\vec{a} + t\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + t^2|\vec{b}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} = 5t^2 - 2t + 10 = 5\left(t - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{49}{5}$$

$$\therefore |\vec{a} + t\vec{b}| \text{ は } t = \frac{1}{5} \text{ のとき, 最小値 } \frac{7\sqrt{5}}{5} \text{ にとる}$$

$$(3) \sin 2\theta - 2\cos \theta = 2\cos \theta(\sin \theta - 1) = 0 \quad \therefore 0 \leq \theta \leq \pi \text{ より, } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$(4) \log_3(2x-3) < \log_3 9$$

$$\therefore \text{真数条件より, } x > \frac{3}{2} \dots \textcircled{1} \text{ と } 2x-3 < 9 \dots \textcircled{2} \text{ より, } \frac{3}{2} < x < 6$$

(5). 取り出し方の総数は, $3^4 = 81$ 通り.

$$\therefore \text{すべて同じ色になるのは3通りなので, } \frac{3}{81} = \frac{1}{27}$$

$$3\text{種類の色になるのは, } 3C_1 \cdot \frac{4!}{2!} = 36 \text{ 通りなので, } \frac{36}{81} = \frac{12}{27}$$

$$\therefore \text{余事象より, 2種類の色であるのは, } 1 - \frac{1}{27} - \frac{12}{27} = \frac{14}{27}$$

約分をここでとめておいた方が
後の計算が楽!