2016年 コンピュータ理工 第6問

数理 石井K

$\boxed{6}$ nを自然数とする．関数$f(x)=e^x\sin x$のn次導関数$f^{(n)}(x)$について，次の等式がなりたつことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

$$f^{(n)}(x)=2^{\frac{n}{2}}e^x\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

(i) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x)'\sin x+e^x(\sin x)' \\ &= e^x\cdot(\sin x+\cos x) \\ &= e^x\cdot\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2^{\frac{1}{2}}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

∴ $n=1$のとき，成り立っている．

(ii) $n=k$のとき成り立つと仮定すると，

$$f^{(k)}(x)=2^{\frac{k}{2}}e^x\sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore\ f^{(k+1)}(x) &= 2^{\frac{k}{2}}\left\{e^x\sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)+e^x\cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)\right\} \\ &= 2^{\frac{k}{2}}e^x\left\{\sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)\right\} \\ &= 2^{\frac{k}{2}}e^x\cdot\sqrt{2}\sin\left\{\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right\} \\ &= 2^{\frac{k+1}{2}}e^x\sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

∴ $n=k+1$のとき，成り立つ

(i)，(ii)より，与えられた等式はすべての自然数nについて成り立つ ▨