0001975364208999

神戸大学

2015 年 第 1 問

数理 石井K

1 s, t を $s<t$ をみたす実数とする．座標平面上の 3 点 A$(1,\ 2)$，B$(s,\ s^2)$，C$(t,\ t^2)$ が一直線上にあるとする．以下の問に答えよ．

(1) s と t の間の関係式を求めよ．

(2) 線分 BC の中点を M$(u,\ v)$ とする．u と v の間の関係式を求めよ．

(3) s, t が変化するとき，v の最小値と，そのときの u, s, t の値を求めよ．

(1). A, B, C が一直線上にある ∴ $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ となる実数 k が存在する．

$\overrightarrow{AB} = (s-1,\ s^2-2)$, $\overrightarrow{AC} = (t-1,\ t^2-2)$ より．

$$\begin{cases} s-1 = k(t-1) \\ s^2-2 = k(t^2-2) \end{cases}$$

∴ $t=1$ とすると $s=1$ となり $s<t$ に反するので

$t-1 \neq 0$

∴ $k = \dfrac{s-1}{t-1}$ を下の式に代入して．$(s^2-2)(t-1) = (s-1)(t^2-2)$

∴ $(s-t)(st-s-t+2)=0$

$s-t<0$ より．$\underline{st-s-t+2=0}$ //

(2) $M\left(\dfrac{s+t}{2},\ \dfrac{s^2+t^2}{2}\right)$ より．$u = \dfrac{s+t}{2}$, $v = \dfrac{s^2+t^2}{2}$

$v = \dfrac{(s+t)^2-2st}{2}$ これに (1) の結果 $st = s+t-2$ を代入して

$v = \dfrac{(s+t)^2-2(s+t)+4}{2}$ ∴ $s+t = 2u$ より．$v = \dfrac{(2u)^2-2\cdot 2u}{2}+2$

∴ $\underline{v = 2u^2-2u+2}$ //

(3) (2) より．$v = 2\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$

∴ $\underline{v \text{ の最小値は } \frac{3}{2} \text{ で，そのとき } u = \frac{1}{2}}$ //

$s+t=2u=1$

$st = s+t-2 = -1$

より．解と係数の関係

により．s, t は

$x^2-x-1=0$

の解となる

s, t は方程式 $x^2-x-1=0$ の解より．$x = \dfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}$

$s<t$ より．$\underline{s = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ //