



2013年理学部第2問

2 次の文中の ~ にあてはまる最も適切な数を答えなさい。

放物線 $y = -x^2 + 1$ を C_1 、また $y = (x-t)^2 + kt + 1$ を C_2 とする。ここで $k > 0$ とし、 t は任意の実数値をとるものとする。 t の値が変化するに従い、 C_2 の頂点の軌跡はある直線になる。この直線を L とする。

(1) $k = 1$ の場合を考える。このとき、直線 L の方程式は、 $y = \text{ア}x + \text{イ}$ である。また C_1 および L によって囲まれた部分の面積は $\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ である。

(2) $k = \frac{1}{2}$ の場合を考える。 C_1 と C_2 がただ1つの点で接する場合、接点の座標は

$$(x, y) = (\text{オ}, \text{カ})$$

および

$$(x, y) = \left(\frac{\text{キ}}{\text{ク}}, \frac{\text{ケ}}{\text{コ}} \right)$$

である。

C_1 と C_2 が2つの共有点をもつのは、 $\text{サ} < t < \text{シ}$ のときである。このとき、それらの x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とすれば、

$$\alpha + \beta = \text{ス}t + \text{セ}, \quad \alpha\beta = \frac{\text{ソ}}{\text{タ}}t^2 + \frac{\text{チ}}{\text{ツ}}t + \text{テ}$$

である。また、 C_1 と C_2 によって囲まれた部分の面積 $S(t)$ は、

$$S(t) = \frac{1}{\text{ト}} (\text{ナ}t^2 + \text{ニ}t + \text{ヌ})^p, \quad \text{ただし } p = \frac{\text{ネ}}{\text{ノ}}$$

である。この面積は $t = \frac{\text{ハ}}{\text{ヒ}}$ のとき最大値 $\frac{\text{フ}}{\text{ヘホ}}$ をとる。