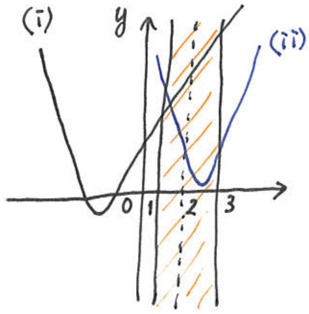
2013年 看護学部 第3問　　1枚目/2枚.

$\boxed{3}$ aを正の定数とし，xの関数 $y=a^2x^2-2ax-1$ $(1 \leqq x \leqq 3)$ ……①を考える．①の最大値をM，最小値をmとする．

(1) M，mをそれぞれaを用いて表せ．

(2) $M-m=\dfrac{1}{3}$であるときのaの値を求めよ．



(1) $y=a^2\left(x^2-\dfrac{2}{a}x\right)-1$

$=a^2\left(x-\dfrac{1}{a}\right)^2-2$

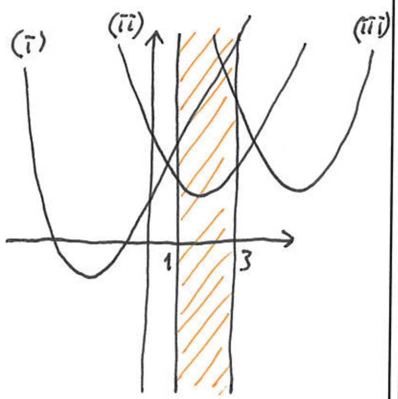
(i) $\dfrac{1}{a}<2$ すなわち $a>\dfrac{1}{2}$ のとき.

最大値をとるのは. $x=3$のとき. $\therefore M=9a^2-6a-1$

(ii) $\dfrac{1}{a}\geqq 2$ すなわち $0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

最大値をとるのは $x=1$のとき $\therefore M=a^2-2a-1$

(i), (ii) より $M=\begin{cases} 9a^2-6a-1 & \left(a>\dfrac{1}{2}のとき\right) \\ a^2-2a-1 & \left(0<a\leqq\dfrac{1}{2}のとき\right) \end{cases}$ //



① $\dfrac{1}{a}<1$ すなわち $a>1$ のとき.

最小値をとるのは $x=1$のとき.

$\therefore m=a^2-2a-1$

② $1\leqq\dfrac{1}{a}\leqq 3$ すなわち $\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq 1$ のとき

最小値をとるのは $x=\dfrac{1}{a}$のとき.

$\therefore m=-2$

③ $\dfrac{1}{a}>3$ すなわち $0<a<\dfrac{1}{3}$ のとき

最小値をとるのは $x=3$のとき $\therefore m=9a^2-6a-1$

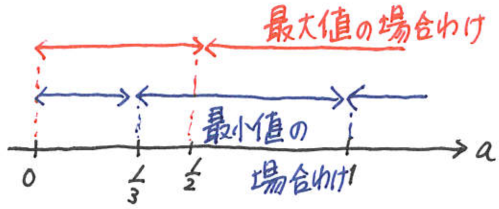
①〜③より $m=\begin{cases} a^2-2a-1 & (a>1のとき) \\ -2 & \left(\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq 1のとき\right) \\ 9a^2-6a-1 & \left(0<a<\dfrac{1}{3}のとき\right) \end{cases}$ //

2013年 看護学部 第3問　2枚目/2枚

$\boxed{3}$ a を正の定数とし，x の関数 $y = a^2x^2 - 2ax - 1$ $(1 \leqq x \leqq 3)$ ……① を考える．①の最大値を M，最小値を m とする．

(1) M，m をそれぞれ a を用いて表せ．

(2) $M - m = \dfrac{1}{3}$ であるときの a の値を求めよ．



(2) (1)より，

(i) $0 < a < \frac{1}{3}$ のとき

$$M - m = a^2 - 2a - 1 - (9a^2 - 6a - 1)$$
$$= -8a^2 + 4a$$

$\therefore M - m = \frac{1}{3} \iff 8a^2 - 4a + \frac{1}{3} = 0$　　$\therefore a = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 8 \cdot \frac{1}{3}}}{16}$

$\therefore a = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{12}$　　$0 < a < \frac{1}{3}$ をみたすのは，$a = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{12}$

(ii) $\frac{1}{3} \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ のとき．

$$M - m = a^2 - 2a - 1 - (-2)$$
$$= a^2 - 2a + 1$$

$\therefore M - m = \frac{1}{3} \iff a - 1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$　　$\therefore a = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$

$\frac{1}{3} \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ をみたすのは，$a = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{3}$

(iii) $\frac{1}{2} < a \leqq 1$ のとき．

$M - m = 9a^2 - 6a - 1 - (-2)$　　$\therefore 3a - 1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$　　$\therefore a = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{9}$

$\frac{1}{2} < a \leqq 1$ をみたすのは，$a = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{9}$

(iv) $a > 1$ のとき．

$$M - m = 9a^2 - 6a - 1 - (a^2 - 2a - 1)$$
$$= 8a^2 - 4a$$

$\therefore 8a^2 - 4a - \frac{1}{3} = 0$　　$a = \dfrac{3 \pm \sqrt{15}}{12}$　ともに $a > 1$ をみたさず不適

(i)〜(iv)より，$\underline{a = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3 + \sqrt{3}}{9},\ \dfrac{3 - \sqrt{3}}{12}}$ //