



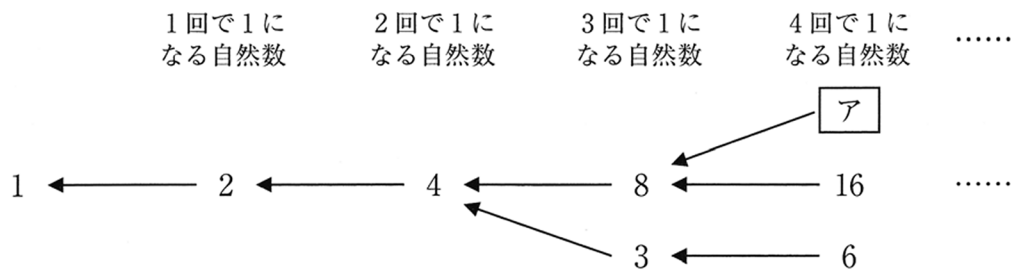
2016年 理学部 第3問

3 次の文中の  ~  にあてはまる最も適切な数値を答えなさい。

(1) 2以上のある自然数を出発点とし、それに対して次の操作を繰り返して行き、1に到達したら終了とする。

- 偶数は2で割り、3以上の奇数は1を足す

この操作によって、自然数2は1回の操作 ( $2 \rightarrow 1$ ) で1に変換される。同様に、3は3回 ( $3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ )、4は2回 ( $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ) の操作で1に変換される。このような変換操作は、下図のように1を起点として枝分かれする樹形図によって整理することができる。



$n$ 回の操作で1になる自然数の個数を  $X_n$  とすれば、1回の操作で1になる自然数は2のみであるので  $X_1 = 1$ 、2回で1となる自然数は4のみであり  $X_2 = 1$ となる。3回で1となる自然数は、1回の操作で4になる3と8の2つがあるので  $X_3 = 2$ となる。4回で1となる自然数は、, 16, 6の3つで  $X_4 = 3$ 、同様にして、 $X_5 =$   であることがわかる。

$n$ 回の操作で1になる偶数の個数を  $E_n$ 、奇数の個数を  $O_n$  と書くと、 $X_n, E_n, O_n$  の間に

$$X_n = E_n + O_n$$

が成立する。

$E_{n+1}$  を  $E_n$  と  $O_n$  で表すと、

$$E_{n+1} = \text{ウ} E_n + \text{エ} O_n$$

となる。また  $n \geq 2$  の場合には、 $O_{n+1}$  を  $E_n$  と  $O_n$  で表すと、

$$O_{n+1} = \text{オ} E_n + \text{カ} O_n$$

となる。これらの2つの漸化式をまとめて、 $X_n$  の漸化式を求めると

$$X_{n+2} = \text{キ} X_{n+1} + \text{ク} X_n$$

となる。 $X_1 = 1$ 、 $X_2 = 1$  だったので、 $X_{10} =$    と求めることができる。

$X_n$  の漸化式を解くことを考える。次の2次方程式を考えよう。

$$x^2 - \text{キ} x - \text{ク} = 0$$



この方程式の2つの解を  $\alpha$ ,  $\beta$  と書くと,

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{サ}} + \sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}, \quad \beta = \frac{\boxed{\text{サ}} - \sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である. 解と係数の関係

$$\alpha + \beta = \boxed{\text{セ}}, \quad \alpha\beta = \boxed{\text{ソ}}$$

を用いることにより,  $X_n$  の漸化式は

$$X_{n+2} - \alpha X_{n+1} = \beta(X_{n+1} - \alpha X_n) \text{ および } X_{n+2} - \beta X_{n+1} = \alpha(X_{n+1} - \beta X_n)$$

と書き直すことができる. したがって漸化式は,

$$X_{n+2} - \alpha X_{n+1} = \beta^n(X_2 - \alpha X_1) \text{ および } X_{n+2} - \beta X_{n+1} = \alpha^n(X_2 - \beta X_1)$$

と解くことができる. これらから  $X_{n+2}$  を消去すれば,  $X_{n+1}$  が得られる.

(2) 数列  $\{a_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , の間には次の漸化式

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$$

が成立し,  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_2 = \frac{3}{4}$  であるとする.

この漸化式を解くために, (1) の解法を用い, 次の2次方程式を考える.

$$x^2 + \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}x + \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} = 0$$

この2次方程式の2つの解を  $\alpha$ ,  $\beta$  と書き, (1) と同様に漸化式を書き直せば,

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \text{ および } a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

であることが分かり, これらから一般項  $a_n$  は

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} + \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \left( \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} \right)^n$$

であることが分かる.