

2014年国際環境工第3問

3 $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と定義する。以下の問いに答えよ。

(1) $x \neq -1$ のとき, $\frac{1}{x+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k + \frac{(-x)^n}{x+1}$ が成立することを証明せよ。

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ のとき, 不等式 $-\frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 \frac{(-x)^n}{x+1} dx \leq \frac{1}{n+1}$ が成立することを証明せよ。

(3) $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (-x)^k dx$ が成立することを証明せよ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。