



2014年理系第1問

1 次の問いに答えよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{8}$ とする。ただし $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ とする。(i) $\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{\text{ア}}}{\text{イ}}$, $\sin\theta - \cos\theta = -\frac{\sqrt{\text{ウ}}}{\text{エ}}$ である。(ii) $\cos 2\theta = \frac{\sqrt{\text{オカ}}}{\text{キ}}$, $\tan\theta = \frac{\text{ク}}{\text{ケコ}}$ である。(2) A, B, C, D, E の5チームがあり、それぞれのチームは他のチームと1回ずつ試合をする。2つのチームが対戦するときの勝敗の確率は $\frac{1}{2}$ とし、引き分けはないものとする。(i) 試合は全部で $\frac{10}{2}$ 試合行われる。(ii) 4敗のチームが現れる確率は $\frac{\text{ス}}{\text{セソ}}$ である。(iii) 3勝1敗のチームがちょうど3チーム現れる確率は $\frac{\text{タ}}{\text{チツテ}}$ である。

(1)(i) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2 \cdot \sin\theta \cos\theta$

$$= \frac{5}{4}$$

 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ より、 $\sin\theta + \cos\theta \geq 0$ なのて

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ より $\cos\theta \geq \sin\theta$ なのて

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2 \sin\theta \cos\theta = \frac{3}{4} \quad \therefore \sin\theta - \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ii) $\cos 2\theta = (\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \frac{4 + \sqrt{15}}{8} \quad \tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \therefore \tan^2\theta = \frac{8}{4 + \sqrt{15}} - 1$$

$$\therefore \tan^2\theta = \frac{8(4 - \sqrt{15})}{(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15})} - 1 = 31 - 8\sqrt{15} \quad \tan\theta = \sqrt{31 - 2\sqrt{240}} = 4 - \sqrt{15}$$

(2)(i) ${}^5C_2 = 10$ 試合

(ii) 同時に2チーム以上が4敗することはないので

$$5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$$

(iii) 二のとき、4敗の4チームが1チームある。(もう1つは1勝3敗)

$$\therefore \frac{5}{16} \times {}^4C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{128}$$