0002164725387999

近畿大学

2015年 理系 第2問

数理 石井K

2 自然数からなる数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を，$a_n + b_n\sqrt{5} = (3+\sqrt{5})^n$ によって定める．

(1) $a_3 =$ アイ（7 2），$b_3 =$ ウエ（3 2）であり，また $a_4 =$ オカキ（3 7 6），$b_4 =$ クケコ（1 6 8）である．

(2) $a_{n+1} =$ サ（3）$a_n +$ シ（5）b_n であり，また $b_{n+1} = a_n +$ ス（3）b_n である．ここで $c_n = a_n - b_n\sqrt{5}$ とおくと，$c_n = ($ セ（3）$- \sqrt{\text{ソ（5）}})^n$ となる．

(3) b_n の値が初めて 10000 を超えるのは $n =$ タ（7）のときである．また，$\dfrac{c_n}{a_n}$ の値が初めて $\dfrac{1}{10000}$ より小さくなるのは $n =$ チ（6）のときである．

(1) $(3+\sqrt{5})^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2\cdot\sqrt{5} + 3\cdot 3\cdot(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^3$

$= 72 + 32\sqrt{5}$

$\therefore \underline{a_3 = 72,\ b_3 = 32}$ //

$(3+\sqrt{5})^4 = (3+\sqrt{5})\cdot(3+\sqrt{5})^3$

$= (3+\sqrt{5})(72+32\sqrt{5})$

$= 376 + 168\sqrt{5}$

$\therefore \underline{a_4 = 376,\ b_4 = 168}$ //

(2) $a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{5} = (3+\sqrt{5})\cdot(3+\sqrt{5})^n$

$= (3+\sqrt{5})(a_n + b_n\sqrt{5})$

$= 3a_n + 5b_n + (a_n + 3b_n)\sqrt{5}$

$\therefore \underline{a_{n+1} = 3a_n + 5b_n,\ b_{n+1} = a_n + 3b_n}$ //

$c_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{5}$

$= 3a_n + 5b_n - \sqrt{5}(a_n + 3b_n)$

$= 3(a_n - b_n\sqrt{5}) - \sqrt{5}(a_n - b_n\sqrt{5})$

$= (3-\sqrt{5})c_n$

∴ 数列 $\{c_n\}$ は，初項 $a_1 - b_1\sqrt{5} = 3-\sqrt{5}$，公比 $3-\sqrt{5}$ の等比数列より，

$\underline{c_n = (3-\sqrt{5})^n}$ //

(3) (2) の a_n と b_n の漸化式から a_n を消去する．

$a_{n+1} = 3a_n + 5b_n$ に，

$a_{n+1} = b_{n+2} - 3b_{n+1}$，$a_n = b_{n+1} - 3b_n$

を代入して，整理すると，

$b_{n+2} = 6b_{n+1} - 4b_n$

これを用いると，

$b_5 = 6\cdot 168 - 4\cdot 32 = 880$

$b_6 = 6\cdot 880 - 4\cdot 168 = 4608$

$b_7 = 6\cdot 4608 - 4\cdot 880 = 24128 > 10000$

$\therefore \underline{n = 7}$ //

$a_n + b_n\sqrt{5} = (3+\sqrt{5})^n$ …①

$a_n - b_n\sqrt{5} = (3-\sqrt{5})^n$ …②

①＋② より，$2a_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$

$\therefore a_n = \frac{1}{2}\{(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n\}$

$\therefore \dfrac{c_n}{a_n} < \dfrac{1}{10000} \iff \dfrac{2(3-\sqrt{5})^n}{(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n} < \dfrac{1}{10000}$

$\iff \dfrac{(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n}{(3-\sqrt{5})^n} > 20000$

$\iff \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right)^n > 19999$

$\iff \left(\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^n > 19999$

$2.2 < \sqrt{5} < 2.3$ より，$6 < \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} < 7$

$7^5 = 16807 < 19999$，$6^6 = 46656 > 19999$

$\therefore \underline{n = 6}$ //