

2010年薬学部第1問



1 関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$ を考える。このとき、次の間に答えなさい。

(1) $f(0) = 65$, $f(4) = 81$ であるという。このとき、 $b = \overset{-4}{\text{アイ}} a - \overset{4}{\text{ウ}}$, $c = \overset{65}{\text{エオ}}$ である。

(2) さらに $x < 0$ となる x で極大値 81 をもつという。このとき、 $a = \text{カ}$ である。

(3) $f(x)$ は $x = \text{キ}$ で極小値 $\overset{49}{\text{クケ}}$ をとる。 $\overset{5}{\text{シ}} \pm \overset{3}{\text{ス}} \sqrt{\overset{3}{\text{セ}}}$

(4) 方程式 $f(x) = 0$ の解は、 $x = \overset{-5}{\text{コサ}}$, $\frac{\overset{5}{\text{シ}} \pm \overset{3}{\text{ス}} \sqrt{\overset{3}{\text{セ}}}}{\overset{2}{\text{ソ}}} i$ である。

(1) $f(0) = 65$ より、 $c = 65$ //

$f(4) = 81$ より、 $64 + 48a + 12b + 65 = 81 \quad \therefore \underline{b = -4a - 4}$ //

(2) $f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3b$
 $= 3(x^2 + 2ax + b)$

(1) より、 $b = -4a - 4$ を代入して、 $f'(x) = 3(x^2 + 2ax - 4a - 4)$
 $= 3(x - 2)\{x + (2a + 2)\}$

$x < 0$ より、極大値をとるのは、 $x = -2a - 2$ のとき。また、 $a > -1 \dots \textcircled{1}$

$\therefore f(-2a - 2) = (-2a - 2)^3 + 3a(-2a - 2)^2 + 3(-4a - 4)(-2a - 2) + 65$
 $= 4a^3 + 24a^2 + 36a + 81$

$\therefore 4a^3 + 24a^2 + 36a = 0$ と仮定して、 $4a(a + 3)^2 = 0$ ①より、 $a = 0$ //

(3) (1), (2) より、 $a = 0, b = -4, c = 65$

$\therefore f'(x) = 3(x + 2)(x - 2) \quad \therefore f(x)$ は $x = 2$ で、極小値 49 // をとる。

(4) $f(x) = x^3 - 12x + 65$ であり、 $f(-5) = 0$

$\therefore f(x)$ は $x + 5$ で割り切れる

$\therefore f(x) = (x + 5)(x^2 - 5x + 13)$

\therefore 解は、 $x = -5, \frac{5 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$ //