0002305454967999

県立広島大学

2016年第1問　1枚目／2枚

数理 石井K

1 数列 $\{a_n\}$ の初項を $a \neq 0$ とし，初項から第 n 項までの和を

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

とする．また，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = 2a_n + \frac{3}{2}a - S_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{b_n\}$ の初項 b を a を用いて表せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列ならば，数列 $\{b_n\}$ も等比数列になることを示せ．

(3) 数列 $\{b_n\}$ が公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列ならば，数列 $\{a_n\}$ も等比数列になることを示せ．

(1) $b_1 = 2a_1 + \frac{3}{2}a - S_1$

ここで，$a_1 = a$，$b_1 = b$，$S_1 = a_1 = a$ より，

$b = 2a + \frac{3}{2}a - a$　　よって，$\underline{b = \frac{5}{2}a}$ //

(2) $\{a_n\}$ が公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列のとき，$a_n = a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，$S_n = \dfrac{a\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}a\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

このとき，

$$\begin{aligned} b_n &= 2\cdot a\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1} + \tfrac{3}{2}a - \tfrac{3}{2}a\left\{1-\left(\tfrac{1}{3}\right)^n\right\} \\ &= 2a\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1} + \tfrac{3}{2}a\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^n \\ &= \tfrac{5}{2}a\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$\therefore$ $\{b_n\}$ は初項 $\frac{5}{2}a$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である ▨

(3) $b_n = 2a_n + \frac{3}{2}a - S_n$ …① より，

$b_{n-1} = 2a_{n-1} + \frac{3}{2}a - S_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ …②

①－② より，$b_n - b_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1} - (S_n - S_{n-1})$　$(n \geqq 2)$

$S_n - S_{n-1} = a_n$ $(n \geqq 2)$ と，$b_n = b\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ より，$b\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - b\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = a_n - 2a_{n-1}$　$(n \geqq 2)$

$\therefore$ $-\frac{2}{3}b\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = a_n - 2a_{n-1}$

両辺を 2^n でわって，$\dfrac{a_n}{2^n} - \dfrac{a_{n-1}}{2^{n-1}} = -b\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

$\therefore$ $c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，$c_n - c_{n-1} = -b\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

2枚目へつづく

2016年 第1問　　2枚目／2枚

数理 石井K

1 数列 $\{a_n\}$ の初項を $a \neq 0$ とし，初項から第 n 項までの和を

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

とする．また，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = 2a_n + \frac{3}{2}a - S_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{b_n\}$ の初項 b を a を用いて表せ．
(2) 数列 $\{a_n\}$ が公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列ならば，数列 $\{b_n\}$ も等比数列になることを示せ．
(3) 数列 $\{b_n\}$ が公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列ならば，数列 $\{a_n\}$ も等比数列になることを示せ．

(3) のつづき

$n \geqq 2$ のとき，$C_n = C_1 + \sum_{k=2}^{n} -b \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}$

$C_1 = \frac{a}{2}$ より，$C_n = \frac{a}{2} - b \cdot \frac{\frac{1}{6}\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{6}}$

$= \frac{a}{2} - \frac{b}{5}\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$

$= \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$

$= \frac{a}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

よって，$C_n = \frac{a_n}{2^n}$ より，$n \geqq 2$ のとき，$a_n = a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

これは $n=1$ のときも成り立つ．よって，$a_n = a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

$\therefore$ $\{a_n\}$ は 初項 a，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である ▨