0001963456308999

県立広島大学

2014年 第3問

数理石井K

$\boxed{3}$ 初項3，公比2の等比数列を $\{a_n\}$ とし，

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (\log_{a_i} 2)\cdot(\log_{a_{i+1}} 2) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1}$ が x についての恒等式になる定数 A，B を求めよ．

(3) $S_n < \log_3 2$ となることを示せ．

(4) $|S_n - \log_3 2| < \dfrac{1}{1000}$ となる最小の n を求めよ．

(1) $\underline{a_n = 3\cdot 2^{n-1}}$ //

(2) (右辺) $= \dfrac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} = \dfrac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$ $\therefore \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{A=1,\ B=-1}$ //

(3) 底の変換公式より．

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\log_2 2}{\log_2 a_i}\cdot\frac{\log_2 2}{\log_2 a_{i+1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\log_2 3\cdot 2^{i-1}}\cdot\frac{1}{\log_2 3\cdot 2^{i}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\log_2 3+i-1)\cdot(\log_2 3+i)}$$

(2)より

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\log_2 3+i-1} - \frac{1}{\log_2 3+i}\right)$$

$$= \frac{1}{\log_2 3} - \frac{1}{\log_2 3+n}$$

$$= \frac{\log_3 2}{\log_3 3} - \frac{1}{\log_2 3+n}$$

$$= \log_3 2 - \frac{1}{\log_2 3+n}$$

$\log_2 3 > 0$ より

$$\therefore \log_3 2 - S_n = \frac{1}{\log_2 3+n} > 0$$

$$\therefore S_n < \log_3 2 \quad ■$$

(4) (3)より． $|S_n - \log_3 2| = \dfrac{1}{\log_2 3+n} < \dfrac{1}{1000}$

$\therefore n + \log_2 3 > 1000$

$\therefore n > 1000 - \log_2 3$

ここで， $\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4$ より $1 < \log_2 3 < 2$

$\therefore n > 998.\cdots$

$\therefore \underline{n = 999}$ //