県立広島大学

2013年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 実数 a, b, α を定数とし，$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする．このとき，

$$\vec{d_n} = (\cos n\alpha,\ \sin n\alpha) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を座標平面上のベクトルとする．ベクトル $\vec{p_n}$ を，

$$\vec{p_1} = \vec{d_1},\quad \overrightarrow{p_{n+1}} = a\vec{p_n} + b\overrightarrow{d_{n-1}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める．$\vec{p_2} = \vec{d_2}$ のとき次の問いに答えよ．

(1) a, b を求めよ．

(2) すべての自然数 n に対し，$\vec{p_n} = \vec{d_n}$ となることを示せ．

(1) $\vec{p_2} = a\vec{p_1} + b\vec{d_0}$

$= a\vec{d_1} + b\vec{d_0}$

$= (a\cos\alpha + b,\ a\sin\alpha)$

$\vec{p_2} = \vec{d_2}$ より，$a\cos\alpha + b = \cos 2\alpha \cdots ①$ かつ $a\sin\alpha = \sin 2\alpha \cdots ②$

② と $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ より，$\sin\alpha(a - 2\cos\alpha) = 0$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より，$0 < \sin\alpha < 1$　　$\therefore \underline{a = 2\cos\alpha}$ //　このとき ① より，$\underline{b = -1}$ //

(2) 数学的帰納法により示す

(i) $n = 1$ のとき

与えられた条件 $\vec{p_1} = \vec{d_1}$ より成り立つ

(ii) $n = k$ のとき成り立つと仮定すると，

$\vec{p_k} = \vec{d_k} \cdots ③$

このとき，$\overrightarrow{p_{k+1}} = 2\cos\alpha \cdot \vec{p_k} - \overrightarrow{d_{k-1}}$

$= 2\cos\alpha \cdot \vec{d_k} - \overrightarrow{d_{k-1}}$

$= (2\cos\alpha \cdot \cos k\alpha - \cos(k-1)\alpha,\ 2\cos\alpha \cdot \sin k\alpha - \sin(k-1)\alpha)$

$= (\cos\alpha\cos k\alpha - \sin\alpha\sin k\alpha,\ \sin k\alpha\cos\alpha + \cos k\alpha\sin\alpha)$

$= (\cos(k+1)\alpha,\ \sin(k+1)\alpha)$

$= \overrightarrow{d_{k+1}}$

$\therefore n = k+1$ のとき成り立つ

(i), (ii) より，すべての自然数 n に対し，$\vec{p_n} = \vec{d_n}$ が成り立つ ▨