

2015年 第2問

1枚目 / 2枚



2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1 = -1, \quad a_{n+1} = \frac{5a_n + 9}{-a_n + 11} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ.

- (1) a_2, a_3, a_4 を求めよ.
- (2) 一般項 a_n を推測し, その結果を数学的帰納法によって証明せよ.
- (3) $a_n < 3$ を示せ.
- (4) $a_n < a_{n+1}$ を示せ.
- (5) a_n が自然数となる n をすべて求めよ.

$$(1) \quad a_2 = \frac{5a_1 + 9}{-a_1 + 11} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{5a_2 + 9}{-a_2 + 11} = \frac{\frac{5}{3} + 9}{-\frac{1}{3} + 11} = \frac{32}{32} = 1, \quad a_4 = \frac{5a_3 + 9}{-a_3 + 11} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

$$\text{まとめると, } a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = \frac{7}{5} //$$

(2) (1) より, $a_n = \frac{3n-5}{n+1}$ と推測できる. ← できなければ a_5, a_6 くらいまで言聞るとよい

これを数学的帰納法で証明する.

(i) $n=1$ のとき.

$$a_1 = \frac{-2}{2} = -1 \text{ となり成り立つ}$$

(ii) $n=k$ のとき, 成り立つと仮定すると,

$$a_k = \frac{3k-5}{k+1}$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } a_{k+1} &= \frac{5a_k + 9}{-a_k + 11} \\ &= \frac{5 \cdot \frac{3k-5}{k+1} + 9}{-\frac{3k-5}{k+1} + 11} \\ &= \frac{15k - 25 + 9(k+1)}{-3k + 5 + 11(k+1)} \quad \leftarrow \text{分子・分母に } k+1 \text{ をかけた} \\ &= \frac{24k - 16}{8k + 16} \\ &= \frac{3(k+1) - 5}{(k+1) + 1} \end{aligned}$$

∴ $n=k+1$ のとき 成り立つ

(i), (ii) より, $a_n = \frac{3n-5}{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ が成り立つ \square

2015年 第2問

2枚目/2枚


 数理
石井K

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1 = -1, \quad a_{n+1} = \frac{5a_n + 9}{-a_n + 11} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ.

- (1) a_2, a_3, a_4 を求めよ.
- (2) 一般項 a_n を推測し, その結果を数学的帰納法によって証明せよ.
- (3) $a_n < 3$ を示せ.
- (4) $a_n < a_{n+1}$ を示せ.
- (5) a_n が自然数となる n をすべて求めよ.

$$\begin{aligned} (3) \quad a_n &= \frac{3(n+1) - 8}{n+1} \\ &= 3 - \frac{8}{n+1} \end{aligned}$$

< 3 (n は自然数より) \square

$$(4) \quad a_n = 3 - \frac{8}{n+1} \text{ であり, } \frac{8}{n+1} \text{ は単調に減少するから.}$$

a_n は単調に増加する. すなわち, $a_n < a_{n+1}$ が成り立つ \square

(5) (3) より, a_n が自然数になるとき.

$$a_n = 1 \text{ または } a_n = 2$$

$$a_n = 1 \Leftrightarrow 3 - \frac{8}{n+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow n = 3$$

$$a_n = 2 \Leftrightarrow 3 - \frac{8}{n+1} = 2$$

$$\Leftrightarrow n = 7$$

$$\therefore \underline{n = 3, 7} \text{ ,,}$$