横浜国立大学

2016年 経済 第3問

$\boxed{3}$ 四面体OABCがあり，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．三角形ABCの重心をGとする．点D，E，Pを $\overrightarrow{OD}=2\vec{b}$，$\overrightarrow{OE}=3\vec{c}$，$\overrightarrow{OP}=6\overrightarrow{OG}$ をみたす点とし，平面ADEと直線OPの交点をQとする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 三角形ADEの面積を S_1，三角形QDEの面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ．

(3) 四面体OADEの体積を V_1，四面体PQDEの体積を V_2 とするとき，$\dfrac{V_2}{V_1}$ を求めよ．

(1) 3点O, G, Qは同一直線上にあるので

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OG}$ (k:実数) と表せる．

$\therefore\ \overrightarrow{OQ}=\dfrac{k}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ …①

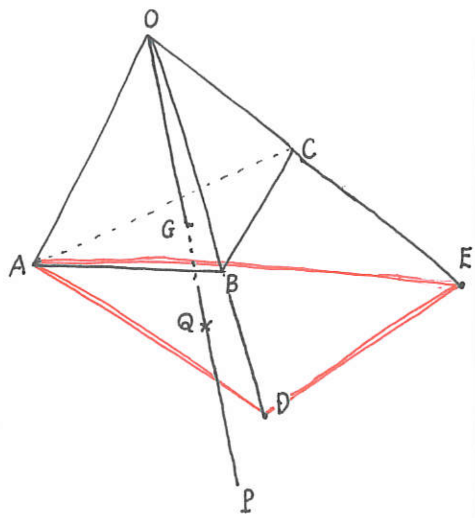
また，点Qは平面ADE上の点より，

$\overrightarrow{OQ}=s\vec{a}+t\overrightarrow{OD}+u\overrightarrow{OE}$ $(s+t+u=1)$

$=s\vec{a}+2t\vec{b}+3u\vec{c}$ $(s+t+u=1)$ …②

①，②より，$s=2t=3u=\dfrac{k}{3}$ かつ $s+t+u=1$

$\therefore\ k=\dfrac{18}{11}$ $\quad\therefore\ \underline{\overrightarrow{OQ}=\dfrac{6}{11}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}$ //



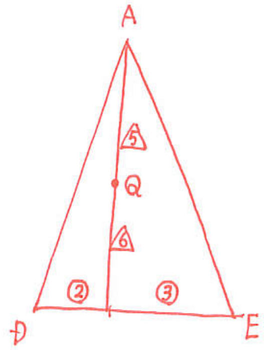
(2) (1)より，$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}$

$=-\dfrac{5}{11}\vec{a}+\dfrac{6}{11}\cdot\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\dfrac{6}{11}\cdot\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OE}$

$=-\dfrac{5}{11}\vec{a}+\dfrac{3}{11}(\overrightarrow{AD}+\vec{a})+\dfrac{2}{11}(\overrightarrow{AE}+\vec{a})$

$=\dfrac{3}{11}\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{11}\overrightarrow{AE}$

$=\dfrac{5}{11}\cdot\left(\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AE}\right)$



$\therefore$ 右の図より，$S_2=S_1\times\dfrac{6}{11}$ $\quad\therefore\ \underline{\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{6}{11}}$ //

(3) $V_1:V_2=\triangle ADE\cdot OQ:\triangle QDE\cdot PQ$

$=11\cdot\dfrac{18}{11}:6\cdot\dfrac{48}{11}$

$=11:16$

$\therefore\ \dfrac{V_2}{V_1}=\underline{\dfrac{16}{11}}$ //