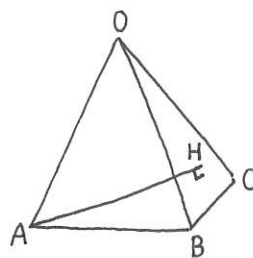


2015年 第3問

3 1辺の長さが1の正四面体をOABCとし、Aから平面OBCに下した垂線をAHとする。 $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$ とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1) 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{c}$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c}$  の値をそれぞれ求めよ。
- (2)  $\vec{AH}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  で表せ。
- (3)  $\vec{AH}$  の大きさ  $|\vec{AH}|$  を求めよ。
- (4)  $\triangle OBC$  の面積を求めよ。
- (5) 正四面体の体積  $V$  を求めよ。



$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{他も同様にして, } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2} //$$

(2) 点Hは平面OBC上にあるので、 $\vec{OH} = s\vec{b} + t\vec{c}$  ( $s, t$ は実数)と表せる。

$$\therefore \vec{AH} = -\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \text{ であり, } AH \perp \text{平面} OBC \text{ より, } \vec{AH} \cdot \vec{b} = 0 \text{ かつ } \vec{AH} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{AH} \cdot \vec{b} &= -\vec{a} \cdot \vec{b} + s|\vec{b}|^2 + t\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= s + \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{AH} \cdot \vec{c} &= -\vec{a} \cdot \vec{c} + s\vec{b} \cdot \vec{c} + t|\vec{c}|^2 \\ &= \frac{s}{2} + t - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \begin{cases} 2s + t = 1 \\ s + 2t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow s = t = \frac{1}{3} \quad \therefore \vec{AH} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} //$$

$$(3) |\vec{AH}|^2 = |\vec{a}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{c}|^2 - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{2}{9}\vec{b} \cdot \vec{c} \quad (\because (2) \text{より})$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\therefore |\vec{AH}| > 0 \text{ より, } |\vec{AH}| = \frac{\sqrt{6}}{3} //$$

$$(4) \triangle OBC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} //$$

$$(5) V = \frac{1}{3} \times \triangle OBC \times AH$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \therefore V = \frac{\sqrt{2}}{12} //$$