慶應義塾大学

2016 年 理工学部 第 4 問

$\boxed{4}$ i を虚数単位とする．次の事実がある．

事実 F

a，b を互いに素な正の整数とする．このとき，

$$\left(\cos\frac{2a}{b}\pi+i\sin\frac{2a}{b}\pi\right)^k=\cos\frac{2}{b}\pi+i\sin\frac{2}{b}\pi$$

となる整数 k が存在する．

(1) 等式

$$\left(\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi\right)^k=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi$$

を満たす最小の正の整数 k は $\boxed{\text{ツ}}$ である．

(2) a，b を互いに素な正の整数とし，集合 P を

$$P=\left\{z\ \middle|\ z \text{ は整数 } k \text{ を用いて} \left(\cos\frac{2a}{b}\pi+i\sin\frac{2a}{b}\pi\right)^k \text{と表される複素数}\right\}$$

で定める．事実 F を考慮すると，集合 P の要素の個数 $n(P)$ は $\boxed{\text{テ}}$ である．

(3) 事実 F を証明しなさい．

(4) a_1，b_1 を互いに素な正の整数とし，a_2，b_2 も互いに素な正の整数とする．集合 Q_1 と Q_2 を

$$Q_1=\left\{z\ \middle|\ z \text{ は整数 } k \text{ を用いて} \left(\cos\frac{2a_1}{b_1}\pi+i\sin\frac{2a_1}{b_1}\pi\right)^k \text{と表される複素数}\right\}$$

$$Q_2=\left\{z\ \middle|\ z \text{ は整数 } k \text{ を用いて} \left(\cos\frac{2a_2}{b_2}\pi+i\sin\frac{2a_2}{b_2}\pi\right)^k \text{と表される複素数}\right\}$$

で定め，集合 R を

$$R=\left\{z\ \middle|\ z \text{ は集合 } Q_1 \text{ の要素と集合 } Q_2 \text{ の要素の積で表される複素数}\right\}$$

で定める．b_1 と b_2 が互いに素ならば，集合 R の要素の個数 $n(R)$ は $\boxed{\text{ト}}$ である．b_1 と b_2 が互いに素でないとき，それらの最大公約数を d とすれば，集合 R の要素の個数 $n(R)$ は $\boxed{\text{ナ}}$ である．