2016年 理工学部 第4問

$\boxed{4}$ iを虚数単位とする．次の事実がある．

事実F

a，bを互いに素な正の整数とする．このとき，

$$\left(\cos\frac{2a}{b}\pi+i\sin\frac{2a}{b}\pi\right)^k=\cos\frac{2}{b}\pi+i\sin\frac{2}{b}\pi$$

となる整数kが存在する．

(1) 等式

$$\left(\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi\right)^k=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi$$

を満たす最小の正の整数kは $\boxed{\text{ツ}}$ である．

(2) a，bを互いに素な正の整数とし，集合Pを

$$P=\left\{z\ \middle|\ z\text{は整数}k\text{を用いて}\left(\cos\frac{2a}{b}\pi+i\sin\frac{2a}{b}\pi\right)^k\text{と表される複素数}\right\}$$

で定める．事実Fを考慮すると，集合Pの要素の個数$n(P)$は $\boxed{\text{テ}}$ である．

(3) 事実Fを証明しなさい．

(4) a_1，b_1を互いに素な正の整数とし，a_2，b_2も互いに素な正の整数とする．集合Q_1とQ_2を

$$Q_1=\left\{z\ \middle|\ z\text{は整数}k\text{を用いて}\left(\cos\frac{2a_1}{b_1}\pi+i\sin\frac{2a_1}{b_1}\pi\right)^k\text{と表される複素数}\right\}$$

$$Q_2=\left\{z\ \middle|\ z\text{は整数}k\text{を用いて}\left(\cos\frac{2a_2}{b_2}\pi+i\sin\frac{2a_2}{b_2}\pi\right)^k\text{と表される複素数}\right\}$$

で定め，集合Rを

$$R=\{z\mid z\text{は集合}Q_1\text{の要素と集合}Q_2\text{の要素の積で表される複素数}\}$$

で定める．b_1とb_2が互いに素ならば，集合Rの要素の個数$n(R)$は $\boxed{\text{ト}}$ である．b_1とb_2が互いに素でないとき，それらの最大公約数をdとすれば，集合Rの要素の個数$n(R)$は $\boxed{\text{ナ}}$ である．