2015年 薬学部 第2問　　1枚目／2枚

数理
石井K

$\boxed{2}$ xy 平面上に放物線 $P: y=\dfrac{1}{4}x^2$ と直線 $\ell: y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}(a^2-1)$ がある．ただし，a は $0<a<\sqrt{33}$ を満たす実数である．P と ℓ は異なる2点A，Bで交わり，A，Bの x 座標をそれぞれ x_A，x_B とおくと，$x_A<x_B$ である．

次に，線分ABを1辺とし，線分CDが(0，8)を通る長方形ABDCをおく．長方形ABDCの面積を $S(a)$ とする．このとき，

(1) 2点C，Dを結ぶ直線の傾きは $\dfrac{\boxed{40}\ 1}{\boxed{41}\ 2}$ であり，線分ABの長さを a を用いて表すと $\sqrt{\overset{5}{\boxed{42}}}\,a$ である．

(2) $S(a)$ を a の式で表すと

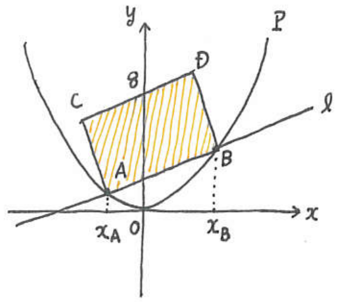
$$S(a)=\frac{\overset{-}{\boxed{43}}\overset{1}{\boxed{44}}}{\underset{2}{\boxed{45}}}a^3+\frac{\overset{3}{\boxed{46}}\overset{3}{\boxed{47}}}{\underset{2}{\boxed{48}}}a$$

である．

また，$S(a)$ が最大値をとるとき，a の値は $\sqrt{\overset{1}{\boxed{49}}\overset{1}{\boxed{50}}}$ である．

(3) 放物線 P と直線 ℓ で囲まれた部分の面積が，$S(a)$ の3倍であるとき，a の値は $\overset{3}{\boxed{51}}\sqrt{\overset{3}{\boxed{52}}}$ である．

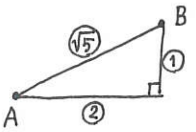
(1) CD // AB で ℓ の傾きは $\frac{1}{2}$ であるから．$\underline{\text{CDの傾きも } \frac{1}{2}}$ 〃



x_A, x_B は方程式 $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}(a^2-1)=0$ の解であるから

解と係数の関係より．$x_A+x_B=-\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2$，$x_Ax_B=\dfrac{-\frac{1}{4}(a^2-1)}{\frac{1}{4}}=1-a^2$

$$\begin{aligned}\therefore (x_B-x_A)^2&=(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B\\&=4-4(1-a^2)\\&=4a^2\end{aligned}$$



$x_B-x_A>0$，$a>0$ より．$x_B-x_A=2a$

$\therefore$ 右図より．$\underline{AB=\sqrt{5}a}$ 〃

(2) ℓ と点(0,8)について点と直線のキョリ公式より　($\ell: 2x-4y+a^2-1=0$)

$$d=\frac{|-4\cdot 8+a^2-1|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{|a^2-33|}{2\sqrt{5}}=\frac{33-a^2}{2\sqrt{5}}\quad (\because 0<a<\sqrt{33})$$

$\therefore S(a)=\sqrt{5}a\cdot\dfrac{33-a^2}{2\sqrt{5}}=\underline{-\dfrac{1}{2}a^3+\dfrac{33}{2}a}$ 〃

$S'(a)=-\dfrac{3}{2}(a+\sqrt{11})(a-\sqrt{11})$

a	(0)	…	$\sqrt{11}$	…	($\sqrt{33}$)
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗		↘	

右の増減表より．$S(a)$ が最大となるのは．$\underline{a=\sqrt{11}}$ 〃 のとき．

2015年 薬学部 第2問　　2枚目／2枚

数理
石井K

$\boxed{2}$ xy 平面上に放物線 $P : y = \frac{1}{4}x^2$ と直線 $\ell : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(a^2 - 1)$ がある．ただし，a は $0 < a < \sqrt{33}$ を満たす実数である．P と ℓ は異なる2点A，Bで交わり，A，Bの x 座標をそれぞれ x_A，x_B とおくと，$x_A < x_B$ である．

次に，線分ABを1辺とし，線分CDが(0，8)を通る長方形ABDCをおく．長方形ABDCの面積を $S(a)$ とする．このとき，

(1) 2点C，Dを結ぶ直線の傾きは $\dfrac{\boxed{40}}{\boxed{41}}$ であり，線分ABの長さを a を用いて表すと $\sqrt{\boxed{42}}\,a$ である．

(2) $S(a)$ を a の式で表すと

$$S(a) = \frac{\boxed{43}\boxed{44}}{\boxed{45}}a^3 + \frac{\boxed{46}\boxed{47}}{\boxed{48}}a$$

である．

また，$S(a)$ が最大値をとるとき，a の値は $\sqrt{\boxed{49}\boxed{50}}$ である．

(3) 放物線 P と直線 ℓ で囲まれた部分の面積が，$S(a)$ の3倍であるとき，a の値は $\boxed{51}\sqrt{\boxed{52}}$ である．

(3) P と ℓ で囲まれた部分の面積を $T(a)$ とすると

$$T(a) = \int_{x_A}^{x_B} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(a^2-1) - \frac{1}{4}x^2\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int_{x_A}^{x_B} (x-x_A)(x-x_B)\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(x_B - x_A)^3$$

$$= \frac{1}{24}\cdot(2a)^3 \quad (\because (1)より)$$

$$= \frac{1}{3}a^3$$

$T(a) = 3S(a)$ より

$$\frac{1}{3}a^3 = -\frac{3}{2}a^3 + \frac{99}{2}a$$

$$\therefore \frac{11}{6}a(a^2 - 27) = 0$$

$0 < a < \sqrt{33}$ より $\underline{a = 3\sqrt{3}}$ 〃