2015 年 理工学部 第 5 問

5 袋に赤玉が 2 個と白玉が 1 個入っている．袋から玉を 1 個取り出し玉の色を見て袋に戻す．このとき取り出した玉と同色の玉をもう 1 つ袋に加える．この操作を繰り返して行う．

(1) n 回目の操作を終えたとき，それまでに赤玉を取り出した回数が k 回（$0 \leqq k \leqq n$）であったとする．このとき，$n+1$ 回目の操作で赤玉を取り出す確率を $p_n(k)$ とおくと，$p_n(k) =$ [ナ] となる．

(2) n 回目の操作を終えるまでに赤玉を取り出す回数が k 回（$0 \leqq k \leqq n$）である確率を $q_n(k)$ とおく．たとえば，$q_1(1) = \dfrac{2}{3}$，$q_4(2) =$ [ニ] となる．n 回の操作中 j 回目（$1 \leqq j \leqq n$）だけ赤玉を取り出し，その他の操作では白玉を取り出す確率は [ヌ] であり，$q_n(1) = n \times$ [ヌ] となる．$q_n(k)$ を n と k を用いて表すと，$q_n(k) =$ [ネ] となる．

(3) n 回目の操作を終えるまでに赤玉を取り出す回数が k 回（$0 \leqq k \leqq n$）であり，$n+1$ 回目の操作で赤玉を取り出す確率は，(1) と (2) で定めた $p_n(k)$ と $q_n(k)$ を用いて $q_n(k)p_n(k)$ となる．このことから，$n+1$ 回目に赤玉を取り出す確率を計算すると [ノ] となる．

(4) $f(x) = e^{-x^2}$ とする．S_n を (1) と (2) で定めた $p_n(k)$ と $q_n(k)$ を用いて

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(p_n(k))q_n(k)$$

とおくと，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n =$ [ハ] となる．