

2014年環境情報学部 第1問

1 次の問いに答えよ.

(1) x, y, z は実数で $xyz \neq 0$ とする. もし

$$2^x = 3^y = \boxed{1} \boxed{2}^z$$

ならば

$$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{z}$$

である.

(2) 関数 $f(x) = x^2 - 2$ に対して, $g(x) = f(f(x))$ とおく. このとき, 方程式 $g(x) = x$ の解は

$$\boxed{3} \boxed{4}, \quad \boxed{5} \boxed{6}, \quad \frac{\boxed{7} \boxed{8} \pm \sqrt{\boxed{9} \boxed{10}}}{\boxed{11} \boxed{12}}$$

である. ただし, 最初の数は 2 番目の数より小とする.

(3) 直線 $y = -3x$ 上の点 P と, 曲線 $xy = 2$ ($x > 0$) 上の点 Q の間の距離の最小値は

$$\frac{\boxed{13} \sqrt{\boxed{14} \boxed{15}}}{\boxed{16} \boxed{17}}$$

である.

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 1 \\ x^2 - x - 2 \overline{) x^4 - 4x^2 - x + 2} \\ \underline{x^4 - x^3 - 2x^2} \\ x^3 - 2x^2 - x \\ \underline{x^3 - x^2 - 2x} \\ -x^2 + x + 2 \\ \underline{-x^2 + x + 2} \\ 0 \end{array}$$

$$(2) \quad g(x) = f(f(x)) = (x^2 - 2)^2 - 2 \quad \therefore (x^2 - 2)^2 - 2 = x$$

$$\therefore x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0 \quad P(x) = x^4 - 4x^2 - x + 2 \text{ とおくと}$$

$$P(-1) = 0, P(2) = 0 \text{ より } P(x) \text{ は } (x+1)(x-2) \text{ で割り切れる.}$$

$$\therefore (x+1)(x-2)(x^2+x-1) = 0 \quad \therefore \text{解は } x = -1, 2, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} //$$

(3) $Q(t, \frac{2}{t})$ ($t > 0$) とおくと. 点と直線の距離公式より.

$$d = \frac{|3t + \frac{2}{t}|}{\sqrt{9+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(3t + \frac{2}{t}\right) \quad (\because t > 0 \text{ より})$$

$$\therefore \text{よって, 相加・相乗の関係より } 3t + \frac{2}{t} \geq 2\sqrt{3t \cdot \frac{2}{t}} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore d \text{ の最小値は } d = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{15}}{5} //$$