慶應義塾大学

2014年 医学部 第4問

$\boxed{4}$ 以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．

三角形 ABC において AB = AC = 1，∠BAC = 2θ とする．

(1) 三角形 ABC の内接円 C_1 の半径を $R_1(\theta)$ とする．$R_1(\theta)$ を θ の式で表すと $R_1(\theta) = \boxed{\text{あ}}$ である．また θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で変化させるときに $R_1(\theta)$ が最大値をとるような θ の値を θ_1 とすると

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin^k \theta_1 = \boxed{\text{い}}$$

が成り立つ．

(2) 三角形 ABC の内側に次のように円 C_2，C_3，…，C_n，… を作る．円 C_1 の外側にあって円 C_1 および辺 AB，AC に同時に接する円を C_2 とし，円 C_1，C_2 の外側にあって円 C_2 および辺 AB，AC に同時に接する円を C_3 とする．以下同様に自然数 $n \geqq 2$ に対して，円 C_1，C_2，…，C_{n-1} の外側にあって円 C_{n-1} および辺 AB，AC に同時に接する円を C_n とする．C_n の半径 $R_n(\theta)$ を θ と n の式で表すと $R_n(\theta) = \boxed{\text{う}}$ である．

(3) x の 2 次式 $g_n(x) = \boxed{\text{え}}$ に対して

$$\frac{d}{d\theta} \log R_n(\theta) = -\frac{g_n(\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

が成り立つ．また θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で変化させるときに $R_n(\theta)$ が最大値をとるような θ の値を θ_n とすると $\sin\theta_n = \boxed{\text{お}}$ である．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\sin\theta_n = \boxed{\text{か}}$ である．このことから，$\theta = \theta_n$ のときの円 C_n の面積 S_n に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 S_n = \boxed{\text{き}}$ が成り立つ．